第五章　磁异常的正演

第一节 计算磁性体磁场的意义与条件

根据已知磁性体计算其磁场分布，在场论或数学中称为正演问题；而根据已知磁场分布确定磁性体的磁性参数和几何参数，称为反演问题。显然正演问题是反演问题的基础。本章主要讨论正演问题。

为了根据磁异常的分布变化特征了解地下磁性地层、岩体的分布特征、构造特征和矿产特征，就要研究不同形状、产状、大小和磁化特点的地质体的磁场，从定性和定量两方面研究磁性体与磁场的关系，了解和掌握磁性体的特征和磁异常特征间的规律，以此作为解释推断的理论依据。这就是计算磁性体磁场的意义所在。

自然界的地质现象是复杂的，岩体和矿体的形状多是不规则的，磁性体是不均匀的。对各种复杂的情况，常难以用数学的方法去计算其磁场分布。但我们知道，了解简单是认识复杂的基础；另外，规则和不规则、均匀和不均匀的概念是相对的，是因条件而变化的，因此，在计算磁性体磁场中，常做如下假设：

(1)磁性体为简单规则形体；

(2)磁性体是均匀磁化的；

(3)观测面是水平的；

(4)不考虑剩磁（或认为M_i与M_r方向是一致）。

除了少数情况外，实际地质情况并不符合上述假设条件，从理论上讲，只有二次曲面形体才能被均匀磁化。由于磁法勘探主要研究被掩盖的磁性地质体，当其有一定的埋藏深度时，形态不规则和磁性不均匀的地质体引起的磁场，可近似为均匀磁化的规则形体的磁场，因此这些假设条件并不失实际意义。

第二节 计算磁性体磁场的基本公式

计算磁性体磁场的方法有很多种，主要是体积分公式法、面积分公式法和重磁位场的泊松公式法。一般根据形体的特征，选用简便的基本公式。

在讨论各种磁性体的磁场时，我们选用右手直角坐标系。***XOY*** 面为观测平面；***Y*** 轴沿地质体走向，***X*** 轴垂直走向，为测线方向，***Z*** 轴垂直向下，坐标原点选在磁性体中心或顶面中心在地面的投影点。我们还规定磁性体以外的计算点以 P 表示，该点坐标以（x，y，z）表示；磁体内的体元点以 ***Q*** 表示，其坐标为（ξ,η,ζ）。

一、重磁位场的泊松公式

一个均匀磁化且密度均匀的物体，其磁位和引力位的解析式间存在一定的关系式，利用这种关系式，可使我们较方便地计算磁性体的磁场。

一个体积为v，密度均匀的物体之引力位为：

$$V = G\sigma\iiint_v \frac{1}{r}dv \tag{5-2-1}$$

式中 G 为引力常数，σ 为密度差，同一均匀磁化物体的磁位为

$$U = -\frac{1}{4\pi}\boldsymbol{M}\cdot grad_p\iiint_v \frac{1}{r}dv \tag{5-2-2}$$

将式（5-2-1）代入式（5-2-2），可得：

$$U = -\frac{1}{4\pi}\boldsymbol{M}\cdot grad_p V \tag{5-2-3}$$

上式即为磁位与引力位间的泊松公式。该式表明，同一个既均匀磁化又密度均匀物体的磁位，可由其引力位来计算。

若已知物体的引力位，利用泊松公式可求得计算磁场各分量的表达式，根据场位关系有

$$\left.\begin{aligned} H_{ax} &= -\mu_0\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\mu_0}{4\pi G\sigma}(M_xV_{xx}+M_yV_{xy}+M_zV_{xz}) \\ H_{ay} &= -\mu_0\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\mu_0}{4\pi G\sigma}(M_xV_{xy}+M_yV_{yy}+M_zV_{yz}) \\ Z_a &= -\mu_0\frac{\partial U}{\partial z} = \frac{\mu_0}{4\pi G\sigma}(M_xV_{xz}+M_yV_{yz}+M_zV_{zz}) \end{aligned}\right\} \tag{5-2-4}$$

对二度体（即沿走向为无限长的物体），因引力位与坐标变量 y 无关，故有

$$\left.\begin{aligned} H_{ax} &= \frac{\mu_0}{4\pi G\sigma}(M_xV_{xx}+M_zV_{xz}) \\ H_{ay} &= 0 \\ Z_a &= \frac{\mu_0}{4\pi G\sigma}(M_xV_{xz}+M_zV_{zz}) \end{aligned}\right\} \tag{5-2-5}$$

式（5-2-4）和式（5-2-5）是利用给定磁性体的引力位导出磁性体磁场表达式的基本公式。

二、体积分公式与磁荷面积分公式

一个体积元为 v 的磁性体，可将其看作是由无数多体积为 dv 的元磁矩 $\boldsymbol{M}dv$ 的元磁体组成，每个元磁体相当于一个磁偶极子，则该磁体的磁位：

$$U = \frac{1}{4\pi}\iiint_v \frac{\boldsymbol{M}\cdot\mathbf{r}}{r^3}dv = \frac{M}{4\pi}\iiint_v \frac{\cos\theta}{r^2}dv \tag{5-2-6}$$

式中，θ 是矢径 $\boldsymbol{r}$ 与磁化强度矢量 $\boldsymbol{M}$ 之间的夹角。

由式（5-2-6）可导出计算磁性体磁场的体积分公式和磁荷面积分公式。

（一）体积分公式

对式（5-2-6）据矢量间的夹角公式

$$\cos\theta = \cos(M,x)\cos(r,x)+\cos(M,y)\cos(r,y)+\cos(M,z)\cos(r,z)$$

磁化强度矢量在三个坐标轴上的分量为

$$M_x = M\cos(M,x); M_y = M\cos(M,y); M_z = M\cos(M,z)$$

将以上关系式代入式（5-2-6），然后根据场位关系以及$\cos(r,x)=(x-\xi)/r$，

$\cos(r,y)=(y-\eta)/r$，$\cos(r,z)=(z-\varsigma)/r$，$r=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\varsigma)^2}$，则最后可得：

$$\left.\begin{aligned}
H_{ax} &= \frac{\mu_0}{4\pi}\left\{M_x\iiint_v \frac{2(x-\xi)^2-(y-\eta)^2-(z-\varsigma)^2}{r^5}dv + M_y\iiint_v \frac{3(x-\xi)(y-\eta)}{r^5}dv \right.\\
&\quad \left. + M_z\iiint_v \frac{3(x-\xi)(z-\varsigma)}{r^5}dv\right\}\\
H_{ay} &= \frac{\mu_0}{4\pi}\left\{M_x\iiint_v \frac{3(x-\xi)(y-\eta)}{r^5}dv + M_y\iiint_v \frac{2(y-\eta)^2-(x-\xi)^2-(z-\varsigma)^2}{r^5}dv \right.\\
&\quad \left. + M_z\iiint_v \frac{3(y-\eta)(z-\varsigma)}{r^5}dv\right\}\\
Z_a &= \frac{\mu_0}{4\pi}\left\{M_x\iiint_v \frac{3(x-\xi)(z-\varsigma)}{r^5}dv + M_y\iiint_v \frac{3(y-\eta)(z-\varsigma)}{r^5}dv \right.\\
&\quad \left. + M_z\iiint_v \frac{2(z-\varsigma)^2-(x-\xi)^2-(y-\eta)^2}{r^5}dv\right\}
\end{aligned}\right\} \quad (5\text{-}2\text{-}7)$$

以上是计算均匀磁化体磁场的积分表达式。当磁性体被沿某一特定方向磁化时，上式可以简化。

（二）磁荷面积分公式

由于

$$\frac{\mathbf{r}}{r^3} = grad_Q(\frac{1}{r}) = -grad_p(\frac{1}{r})$$

故式（5-2-6）可写为

$$U = -\frac{1}{4\pi}\iiint_v \boldsymbol{M}\cdot grad_p(\frac{1}{\mathbf{r}})dv \qquad (5\text{-}2\text{-}8)$$

已知散度公式有

$$div_Q(\frac{\boldsymbol{M}}{r}) = \frac{1}{r}div_Q\boldsymbol{M} + \boldsymbol{M}\cdot grad_Q(\frac{1}{r})$$

移项后为 $\boldsymbol{M}\cdot grad_Q(\frac{1}{r}) = div_Q(\frac{\boldsymbol{M}}{r}) - \frac{1}{r}div_Q\boldsymbol{M}$

将上式代入式（5-2-8），得

$$U = \frac{1}{4\pi}\left\{\iiint_v div_Q(\frac{\boldsymbol{M}}{r})dv - \iiint_v div_Q\boldsymbol{M}\,\frac{dv}{r}\right\} \qquad (5\text{-}2\text{-}9)$$

根据矢量积分中的高斯公式

$$\iiint_v div_Q(\frac{\boldsymbol{M}}{r})dv = \iint_s \boldsymbol{M}\cdot\mathbf{n}\frac{ds}{r}$$

上式中 $\boldsymbol{n}$ 为磁性体边界面 s 的外法线方向，因此，式（5-2-9）可改写为

$$U = \frac{1}{4\pi}\left\{\iint_s \boldsymbol{M}\cdot\mathbf{n}\frac{ds}{r} + \iiint_v (-div_Q\boldsymbol{M})\frac{dv}{r}\right\} \tag{5-2-10}$$

上式是场论的一个重要结论。它表明，磁性体在 P 点的磁位，等于磁荷面密度 $\sigma_m = \boldsymbol{M}\cdot\mathbf{n} = \boldsymbol{M}_n$ 的各个表面和磁荷体密度为 $\rho_m = -div_Q\boldsymbol{M}$ 的磁体在 P 点引起的磁位之和。

当为均匀磁化时，$\boldsymbol{M}$ 为常量，$\mathrm{div}_Q\mathbf{M} = 0$，因此

$$U = \frac{1}{4\pi}\iint_s \frac{M_n}{r}ds \tag{5-2-11}$$

上式为均匀磁化体在 P 点的磁位，等于该磁体外表面磁荷在该点磁位的总和。凡是由一些平表面所围成的形体，利用磁荷面积分公式计算其磁场是方便的，每个面的 M_n 是常量。

根据场位关系式，磁场各分量的积分公式为

$$\left.\begin{aligned} H_{ax} &= \frac{\mu_0}{4\pi}\iint_s \frac{M_n\cos(r,x)}{r^2}ds = \frac{\mu_0}{4\pi}\iint_s \frac{M_n(x-\xi)}{r^3}ds \\ H_{ay} &= \frac{\mu_0}{4\pi}\iint_s \frac{M_n\cos(r,y)}{r^2}ds = \frac{\mu_0}{4\pi}\iint_s \frac{\mathrm{M}_n(y-\eta)}{r^3}ds \\ Z_a &= \frac{\mu_0}{4\pi}\iint_s \frac{M_n\cos(r,z)}{r^2}ds = \frac{\mu_0}{4\pi}\iint_s \frac{M_n(z-\varsigma)}{r^3}ds \end{aligned}\right\} \tag{5-2-12}$$

由以上公式可知，当形体给定后，只要确定了 M_n 和积分限，代入上式计算出面积分，即可求得给定磁性体磁场表达式。

三、有效磁化强度矢量

假设磁性体均匀磁化且不考虑退磁和剩磁，磁化强度矢量 $\boldsymbol{M}$ 的空间分布如图 5-2-1。图中 $\boldsymbol{M}$ 为总磁化强度矢量，$\boldsymbol{M}_\mathrm{s}$ 为 $\boldsymbol{M}$ 在 XOZ 面（即观测剖面）的投影（分量），称为有效磁化强度矢量；$\boldsymbol{M}_\mathbf{H}$ 为 $\boldsymbol{M}$ 在 XOY 面的投影，叫水平磁化强度矢量；I 表示 $\boldsymbol{M}$ 的倾角，即磁化倾角；i_s 为 $\boldsymbol{M}_\mathrm{s}$ 的倾角，即 $\boldsymbol{M}_\mathrm{s}$ 与 OX 轴间夹角，称为有效磁化倾角；A' 为 $\boldsymbol{M}_\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{M}_\mathbf{H}$ 间的夹角，$\boldsymbol{A}$ 为磁性体走向与磁北的夹角。由图可以看出

$$\left.\begin{aligned} M_x &= M\cos I\cos A' = M_s\cos i_s = M\cos I\sin A \\ M_y &= M\cos I\sin A' = M\cos I\cos A \\ M_z &= M\sin I = M_s\sin i_s \end{aligned}\right\} \tag{5-2-13}$$

由上式可知

$$\left.\begin{aligned} M &= \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} \\ M_s &= \sqrt{M_x^2 + M_z^2} = M\sqrt{\cos^2 I \cos^2 A' + \sin^2 I} \end{aligned}\right\} \qquad (5\text{-}2\text{-}14)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{M_x}{M} &= \cos I \cos A' = \cos I \sin A \\ \frac{M_y}{M} &= \cos I \sin A' = \cos I \cos A \\ \frac{M_z}{M} &= \sin I \\ tgi_s &= tgI \sec A' = tgI \csc A \end{aligned}\right\} \qquad (5\text{-}2\text{-}15)$$

以上关系式表明，磁性体的磁化强度与磁性体的走向或剖面方向有关，走向不同，被磁化的情况也不同。这是因为在一个局部地区，地磁场的方向是一定的，而磁性体的走向可能不同；不同走向的磁性体，地磁场对它的磁化特点也不相同，即表面磁荷分布不同。

由以上讨论可知，在前述假设条件下，磁性体被磁化的情况，不仅与当地地磁场的大小和方向有关系、与其自身磁化率有关，还与磁性体的走向或剖面方向有关。

在影响磁性体磁场特征的诸因素中，当形体确定后，磁化强度的方向是决定磁场特征的重要（或主要）因素。因为磁化强度的方向决定了磁性体磁荷的分布特征，磁荷的分布与磁性体磁场的分布特征直接有关。

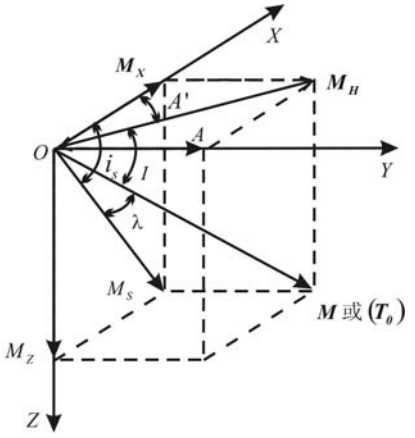


图 5-2-1 磁化强度矢量空间分布图

由（5-2-15）式可得，在中高纬度区，当地质体南北走向 A=0º 时，在东西剖面内，i_s=90º，相当于垂直磁化；当地质体东西走向 A=90º，在南北剖面内有 i_s=I，相当于斜磁化。因此分析地磁场对磁性体不同走向的磁化作用是十分重要的。

四、总磁场强度异常 ΔT

目前的地面高精度磁测与航空磁测，都是直接测量地磁场总强度 T，减去正常地磁场后得到总磁场异常 ΔT。我们知道，Z_a、H_{ax}、H_{ay} 是磁异常总强度矢量 $\boldsymbol{T}_a$ 的垂直和水平分量，因此需要研究 ΔT 与 Z_a、H_{ax}、H_{ay} 的关系，以便通过 Z_a、H_{ax}、H_{ay} 三分量计算 ΔT。

（一）ΔT 的物理意义

磁异常总强度矢量 $\boldsymbol{T}_a$ 是磁场总强度 $\boldsymbol{T}$ 与正常场 $\boldsymbol{T}_0$ 的矢量差，即：

$$\boldsymbol{T}_a = \boldsymbol{T} - \boldsymbol{T}_0 \qquad (5\text{-}2\text{-}16)$$

而ΔT是$\boldsymbol{T}$与$\boldsymbol{T}_0$的模量差，即：

$$\Delta T = |\boldsymbol{T}| - |\boldsymbol{T}_0| \tag{5-2-17}$$

ΔT既不是$\boldsymbol{T}_a$的模量，也不是$\boldsymbol{T}_a$在$\boldsymbol{T}_0$方向的投影，如图5-2-2所示。

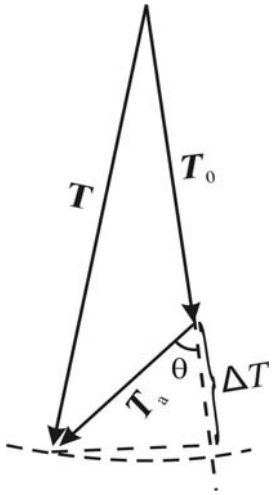


图5-2-2 ΔT与$\boldsymbol{T}_a$关系图

根据矢量三角形的余弦定理

$$T = \sqrt{T_0^2 + T_a^2 + 2T_0T_a\cos\theta}$$

上式中θ是$\boldsymbol{T}_a$与$\boldsymbol{T}_0$间的夹角。根据式（5-2-17），上式可写为

$$T_0 + \Delta T = \left(T_0^2 + T_a^2 + 2T_0T_a\cos\theta\right)^{1/2}$$

对上式两端取平方，并除以T_0^2，则得

$$\left(\frac{\Delta T}{T_0}\right)^2 + 2\left(\frac{\Delta T}{T_0}\right) = \left(\frac{T_a}{T_0}\right)^2 + 2\left(\frac{T_a}{T_0}\right)\cos\theta \tag{5-2-18}$$

当$T_a << T_0$时，上式中的平方项可略去。例如，在中纬度地区，T_0=50000nT，若$T_a \le 2000$nT 时，则：$\left(T_a/T_0\right)^2 \le 0.0016$。又因$\Delta T < T_a$，故$\left(\Delta T/T_0\right)^2$项也可略去。因此，式（5-2-18）可简化为

$$\Delta T \doteq T_a\cos\theta = T_a\cos(T_a, T_0) \tag{5-2-19}$$

上式表明，当磁异常T_a强度不大时，可近似把ΔT看作是$\boldsymbol{T}_a$在$\boldsymbol{T}_0$方向的投影；航空磁测中一般T_a<1000nT，在进行高精度地面磁测的地区，一般T_a也不大。因此将ΔT近似看作$\boldsymbol{T}_a$在$\boldsymbol{T}_0$方向的投影，有足够的精度。另外，$\boldsymbol{T}_0$在相当大的区域内，方向是不变的（10000km^{2}内变化1°左右），因此，可把ΔT看作是$\boldsymbol{T}_a$在固定方向的投影。这样，ΔT的物理意义与Z_a、H_a类似，都是$\boldsymbol{T}_a$在固定方向的分量。

（二）ΔT与Z_a、H_a的关系

由于ΔT是$\boldsymbol{T}_a$在$\boldsymbol{T}_0$方向的分量，因此有：

$$\Delta T = -\mu_0\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{t}_0}$$

其中 $\boldsymbol{t}_0$ 表示 $\boldsymbol{T}_0$ 的单位矢量，其方向余弦为 $\cos(x,t_0)=\cos\alpha$， $\cos(y,t_0)=\cos\beta$，$\cos(z,t_0)=\cos\gamma$；又因为 H_{ax}、H_{ay}、Z_a 为 $\boldsymbol{T}_a$ 在三个坐标轴上的分量，因此

$$\Delta T = H_{ax}\cos\alpha + H_{ay}\cos\beta + Z_a\cos\gamma \qquad (5\text{-}2\text{-}20)$$

上式表示，ΔT 是 $\boldsymbol{T}_a$ 的三个分量分别投影到 $\boldsymbol{T}_0$ 方向之和。

因为 $\boldsymbol{T}_0$ 在 *XOY* 面的投影为 $\boldsymbol{H}_0$，$\boldsymbol{T}_0$ 与 $\boldsymbol{H}_0$ 的夹角为 *I*，测线方向 *X* 轴与 $\boldsymbol{H}_0$ 的夹角为 A'，则有：$\cos\alpha=\cos I\cos A'$， $\cos\beta=\cos I\sin A'$， $\cos\gamma=\sin I$，故式（5-2-20）可写为

$$\Delta T = H_{ax}\cos I\cos A' + H_{ay}\cos I\sin A' + Z_a\sin I \qquad (5\text{-}2\text{-}21)$$

上式即为 ΔT 与 H_{ax}、H_{ay}、Z_a 的基本关系式。它表明，知道了 H_{ax}、H_{ay} 和 Z_a 的磁场表达式，由上式即可求得 ΔT 的磁场表达式。

对于二度体，由于磁性体沿 *y* 方向无限伸长，磁位沿 *y* 方向无变化，磁位对 *y* 的微商为零，即 $H_{ay}=0$，故式（5-2-21）简化为

$$\Delta T = H_{ax}\cos I\cos A' + Z_a\sin I \qquad (5\text{-}2\text{-}22)$$

式（5-2-21）对任何形体都适用，而（5-2-22）式只适用于测线垂直走向的水平二度体。

第三节　空间域磁性体磁场的计算

在本节讨论的磁场 Z_a、H_{ax}、H_{ay} 均以磁化强度倾角或有效磁化强度倾角、剖面与磁化强度水平投影夹角表达。对 ΔT，一般讨论磁化强度方向与地磁场方向一致情况下的表达，即磁化强度倾角与地磁倾角一致，均以 I 表示，剖面方位角以 A' 表示。

一、球体

在自然界一些有限大小的地质体，当中心埋深比其直径大很多时，它们在地面产生的磁场特征与球体磁场特征近似。因此，讨论球形磁性体不仅有实际意义，也有一定代表性。

（一）球体磁场表达式

如 5-3-1 所示，设球体中心埋深为 R，磁化强度为 $\boldsymbol{M}$，体积为 v，磁矩 m=$\boldsymbol{M}v$；球心坐标 Q(0,0,R)，球心到空间任一点 P（x，y，z）的距离 $r=\left[x^2+y^2+(z-\varsigma)^2\right]^{1/2}$。其磁场表达式可由泊松公式或磁偶极子磁场公式得出。

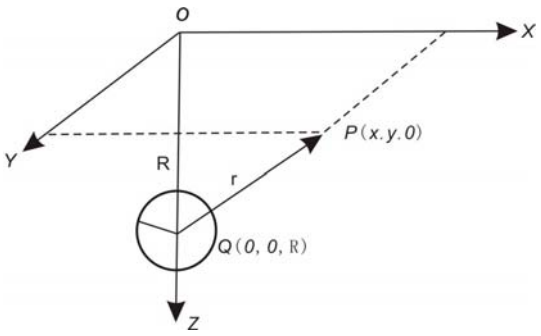


图 5-3-1 球体与坐标的关系

球体的引力位 V 为

$$V=\frac{G\sigma v}{\left[x^2+y^2+(z-\varsigma)^2\right]^{1/2}}$$

对上式求二次导数后，令 $z=0,\varsigma=R$,磁化强度倾角为 I，剖面与磁化强度水平投影夹角为 A'，代入式（5-2-4），可得：

$$\left.\begin{aligned}
H_{ax}&=\frac{\mu_0 m}{4\pi(x^2+y^2+R^2)^{5/2}}[(2x^2-y^2-R^2)\cos I\cos A^{'}\\
&\quad -3Rx\sin I+3xy\cos I\sin A']\\
H_{ay}&=\frac{\mu_0 m}{4\pi(x^2+y^2+R^2)^{5/2}}[(2y^2-x^2-R^2)\cos I\sin A^{'}\\
&\quad -3Ry\sin I+3xy\cos I\cos A']\\
Z_a&=\frac{\mu_0 m}{4\pi(x^2+y^2+R^2)^{5/2}}[(2R^2-x^2-y^2)\sin I\\
&\quad -3Rx\cos I\cos A^{'}-3Ry\cos I\sin A^{'}]
\end{aligned}\right\}\qquad (5\text{-}3\text{-}1)$$

将式（5-3-1）代入式（5-2-21），化简后可得：

$$\begin{aligned}
\Delta T=&\frac{\mu_0 m}{4\pi(x^2+y^2+R^2)^{5/2}}[(2R^2-x^2-y^2)\sin^2 I+(2x^2-y^2-R^2)\cos^2 I\cos^2 A^{'}\\
&+(2y^2-x^2-R^2)\cos^2 I\sin^2 A^{'}-3xR\sin 2I\cos A'\\
&+3xy\cos^2 I\sin 2A^{'}-3yR\sin 2I\sin A^{'}]
\end{aligned}\qquad (5\text{-}3\text{-}2)$$

式（5-3-1）和（5-3-2）为剖面方向相对球体位置任意时的剖面磁场表达式。当剖面取特定方向时，两式还可以简化。

当我们讨论通过原点的中心剖面（或称主剖面）时，因为 $y=0$，$M_S=M\cos\lambda$（此处 λ 为 M_s 与 M 之间的夹角）；又因 $\cos\lambda=\sin I/\sin i_s$，以及 $\cot i_s=\cot I\cos A'$；令 $m_s=M_s\cdot v$，则在中心剖面上的磁场分量表达式为：

$$
\left.\begin{aligned}
Z_a &= \frac{\mu_0 m_s}{4\pi\left(x^2+R^2\right)^{5/2}}\left[\left(2R^2-x^2\right)\sin i_s - 3Rx\cos i_s\right] \\
H_{ax} &= \frac{\mu_0 m_s}{4\pi\left(x^2+R^2\right)^{5/2}}\left[\left(2x^2-R^2\right)\sin i_s - 3Rx\sin i_s\right] \\
H_{ay} &= \frac{-\mu_0 m_s}{4\pi\left(x^2+R^2\right)^{5/2}}\left(x^2+R^2\right)\sin i_s \cot I \sin A'\cos\lambda \\
\Delta T &= \frac{\mu_0 m_s}{4\pi\left(x^2+R^2\right)^{5/2}}[\left(2R^2-x^2\right)\sin i_s \sin I + (2x^2-R^2)\cos i_s \cos I \cos A' \\
&\quad - 3xR\cdot 2\sin i_s \cos I \cos A' - (x^2+R^2)\sin i_s \cot I \cos I \sin^2 A']
\end{aligned}\right\} \quad (5\text{-}3\text{-}3)
$$

（二）磁场特征分析

由球体的磁场表达式可以看出，球体的磁场不仅与其位置、体积、磁化强度的大小和方向有关系，而且与计算剖面的方向和位置、计算点的坐标有关系。对磁性体的磁场，既应注意其平面特征，也应注意其剖面特征和空间特征。这样，才便于掌握一种形体与另一种形体磁场特征的区别。

1、平面特征

图（5-3-2）和图（5-3-3）是球体的 Z_a、ΔT 等值线平面图。由图可见，Z_a 等值线呈等轴状，负异常包围着正异常；极大值和极小值连线（即异常的极轴）对应磁化强度矢量 M 在平面上的投影方向；极小值位于正异常的北侧，极大值位于坐标原点之南侧，可用 Z_a 平面等值线图中的极大值与极小值点的连线确定主剖面。由图可知，ΔT 受磁化倾角的影响比 Z_a 大，在相同的磁化倾角其负值较大。

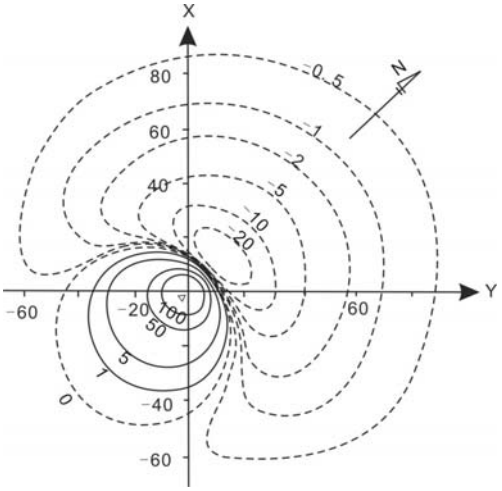


图 5-3-2 球体 Za 等值线平面图
$A'=I=45^\circ, R=15, \Delta$ 为极值位置

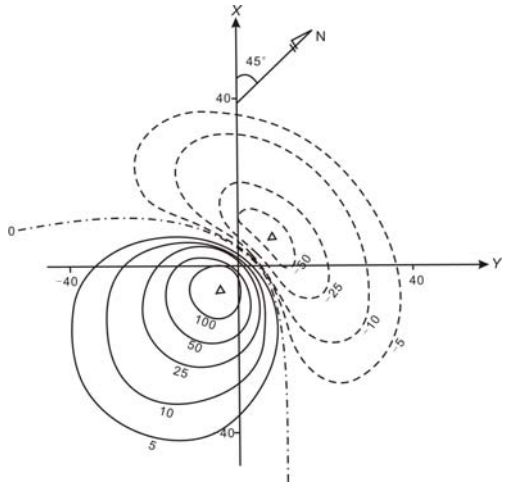


图 5-3-3 球体△T 等值线平面图
$A'=I=45^\circ, R=15, \Delta$ 为极值位置

2、主剖面特征

当球体被沿特定方向磁化，且为特定方向主剖面（y=0），其磁场表达式可大为简化，剖面曲线形态也简单，易于掌握。

1）垂直磁化，即 $i_s = I = 90^\circ$，则有

$$\left.\begin{aligned} Z_a &= \frac{\mu_0 m}{4\pi(x^2+R^2)^{5/2}}\cdot(2R^2-x^2) \\ H_{ax} &= \frac{-\mu_0 m}{4\pi(x^2+R^2)^{5/2}}\cdot 3xR \\ H_{ay} &= 0 \\ \Delta T &= Z_a \end{aligned}\right\} \tag{5-3-4}$$

此时 Z_a 为对称曲线，如图5-3-4中 $i_s=90^\circ$ 所示， $Z_{a\max}$ 在原点处，由式（5-3-4）可得 $Z_{a\max}=\dfrac{\mu_0 m}{2\pi R^3}$。当 Z_a=0时， $x_0=\pm\sqrt{2}R$。

2）斜磁化时， Z_a 为两边有负值的非对称曲线， ΔT 与 Z_a 曲线形态类似，只是 ΔT 受磁化倾角的影响比 Z_a 更大。若主剖面为东西方向，则 $A'=90^\circ$， $i_s=90^\circ$，这时的磁场表达式为

$$\left.\begin{aligned} Z_a &= \frac{\mu_0 m_s}{4\pi(x^2+R^2)^{5/2}}(2R^2-x^2) \\ H_{ax} &= \frac{-\mu_0 m_s}{4\pi(x^2+R^2)^{5/2}}3Rx \\ H_{ay} &= \frac{-\mu_0 m_s}{4\pi(x^2+R^2)^{3/2}}\cos I \\ \Delta T &= Z_a\sin I + H_{ay}\cos I \end{aligned}\right\} \tag{5-3-5}$$

比较式（5-3-4）和式（5-3-5）可知，除 ΔT 、 H_{ay} 外，在这两种情况的 Z_a 或 H_{ax} 曲线形态相同，仅是幅值有差别，式中 $m_s=m\cdot\sin I$。

当剖面为南北方向，即 $A'=0^\circ$ 时，这时 $i_s=I$， $m_s=m$，由式（5-3-3），其 Z_a 、 ΔT 的表达式为：

$$\left.\begin{aligned} Z_a &= \frac{\mu_0 m}{4\pi(x^2+R^2)^{5/2}}[(2R^2-x^2)\sin I - 3xR\cos I] \\ \Delta T &= \frac{\mu_0 m}{4\pi(x^2+R^2)^{5/2}}[(2R^2-x^2)\sin^2 I + (2x^2-R^2)\cos^2 I - 3xR\sin 2I] \end{aligned}\right\} \tag{5-3-6}$$

由上式可以看， ΔT 比 Z_a 受磁化倾角的影响大，表达式 ΔT 也较 Z_a 繁。从磁场表达式的结构看，二者类同，均由三部分组成，即常数部分、分子部分和分母部分。常系数部分只影响场的强弱，即剖面曲线的幅度；分母函数部分主要影响曲线随*x*的衰减特征，分母方次越高，曲线衰减越快；而分子函数部分则决定曲线的正负、对称性等变化特征。

在通常情况下， Z_a 、 H_a 、 ΔT 均为不对称曲线，有三个极值，***M*** 倾向一侧的 $Z_{a\min}$ 、 $H_{a\min}$ 、 $\Delta T_{\min}$ 较 ***M*** 倾向相反一侧的同类极值明显。当 i_s 由 90º 变到 0º 时， ΔT 、 H_a 的特

征变化见图 5-3-4。

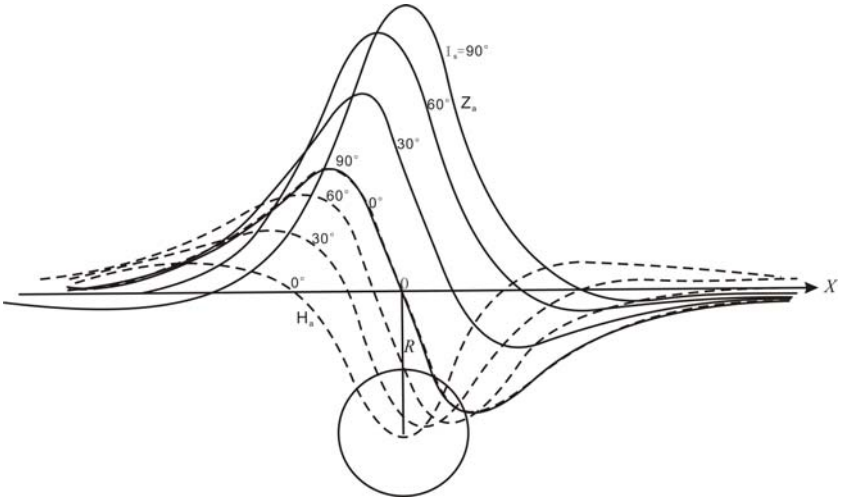


图 5-3-4 不同磁化方向球体 Z_a、H_a 剖面图

3、空间分布特征

磁场的空间分布特征，是指磁性体的磁场在某铅垂面内的变化规律。图 5-3-5 和图 5-3-6 是球体磁场 Z_a、ΔT 空间等值线图，由图可知，Z_a 空间等值线是一系列以球心为对称点的双纽线簇，Z_a 的零值线都是直线，且相交于球心；Z_a 随 R 增大，Z_a 场值减小，正负异常范围增大，且 $Z_{a\min}$ 发生位移。ΔT 与 Z_a 空间等值线形态类似，但两条零值线之间的夹角不等。

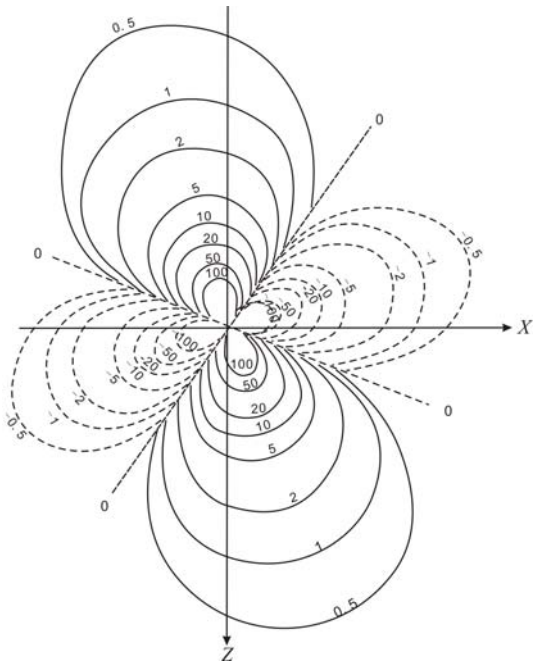


图 5-3-5 球体磁场 Z_a 空间等值线图

$A'=I=45^\circ, y=0$

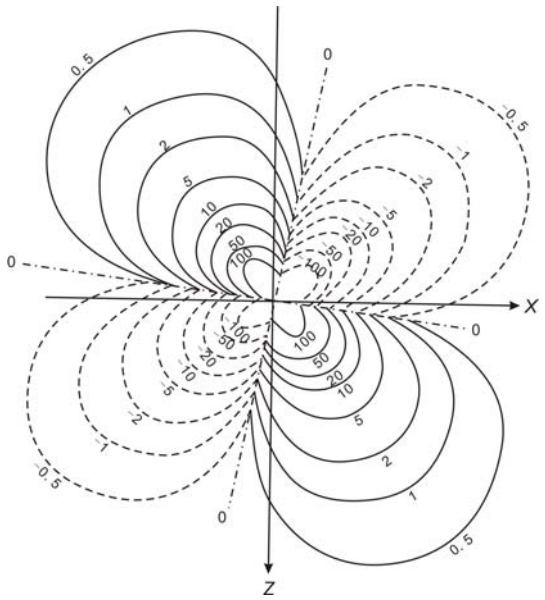


图 5-3-6 球体磁场△T 空间等值线图

$A'=I=45^\circ, y=0$

二、水平圆柱体

对水平圆柱体，我们只讨论二度情况，即沿走向水平圆柱体无限伸长，且沿走向水平圆柱体的埋深、截面形状、磁化特征均稳定不变的情况。在这种情况下，它在空间直角坐标系中的场，只与坐标（x、z）有关，而与y无关。

（一）二度水平圆柱体的磁场表达式

如图5-3-7所示，设水平圆柱体沿走向无限伸长，横截面积为S，中心埋深为R，有效磁化强度为M_s，其倾角为i_s。

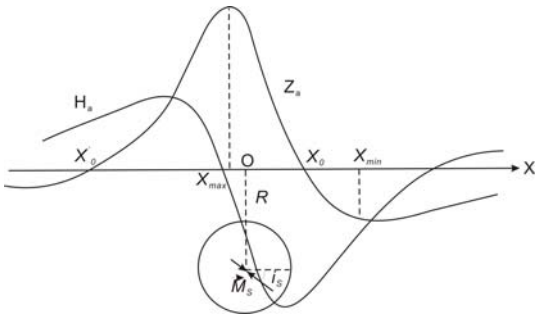


图 5-3-7 水平圆柱体的剖面曲线图

由场论可知，水平圆柱体的引力位为

$$V = -2G\sigma S\ln r \qquad (5\text{-}3\text{-}8)$$

式中:S 为柱体截面积，σ 为柱体的密度，r 为观测点到柱轴的距离，$r=\left[(x-\xi)^2+(z-\zeta)^2\right]^{1/2}$。

式（5-3-8）表明，一个密度均匀的无限长水平圆柱体的引力位等于其质量集中于柱轴在该点的引力位。对式（5-3-8），求二次偏导后，将其代入式（5-2-5），则得：

$$\left.\begin{aligned} Za &= \frac{\mu_0 S\left\{M_z\left[(z-\zeta)^2-(x-\xi)^2\right]+2M_x(x-\xi)(z-\zeta)\right\}}{2\pi\left[(x-\xi)^2+(z-\zeta)^2\right]^2} \\ H_{ax}=H_a &= \frac{\mu_0 S\left\{M_x\left[(x-\xi)^2-(z-\zeta)^2\right]+2M_z(x-\xi)(z-\zeta)\right\}}{2\pi\left[(x-\xi)^2+(z-\zeta)^2\right]^2} \end{aligned}\right\} \qquad (5\text{-}3\text{-}9)$$

由于我们选取的坐标原点与柱体中心在地面的投影点重合，则$\xi=0,\zeta=R,z=0$。将此代入上式，并考虑到：$M_x=M_s\cos i_s, M_z=M_s\sin i_s$，$i_s$为有效磁化强度倾角，$M_s$为$M$在$xoz$断面内的投影，令$m_s=SM_s$为单位长度的有效磁矩，则有

$$\left.\begin{aligned} Z_a &= \frac{\mu_0 m_s}{2\pi}\frac{1}{\left(x^2+R^2\right)^2}\left[\left(R^2-x^2\right)\sin i_s-2Rx\cos i_s\right] \\ H_a &= -\frac{\mu_0 m_s}{2\pi}\frac{1}{\left(x^2+R^2\right)^2}\left[\left(R^2-x^2\right)\cos i_s+2Rx\sin i_s\right] \end{aligned}\right\} \qquad (5\text{-}3\text{-}10)$$

将上式代入式（5-2-22），令I 为地磁倾角，$\boldsymbol{M}$与地磁场$\boldsymbol{T_0}$方向一致，则上式可写为

$$\Delta T = \frac{\mu_0 m_s}{2\pi\left(x^2+R^2\right)^2}\frac{\sin I}{\sin i_s}\left[\left(R^2-x^2\right)\sin(2i_s-90^\circ)-2Rx\cos(2i_s-90^\circ)\right] \qquad (5\text{-}3\text{-}12)$$

（二）磁场特征分析

首先分析特定磁化方向的情况，若为垂直磁化，即$\mathrm{i}_s=90^\circ$或$I=\mathrm{i}_s=90^\circ$，则由式（5-3-10）有

$$\left.\begin{aligned}Z_{a\perp}&=\frac{\mu_0 m_s(R^2-x^2)}{2\pi(x^2+R^2)^2}\\H_{a\perp}&=\frac{-\mu_0 m_s\cdot 2Rx}{2\pi(x^2+R^2)^2}\end{aligned}\right\}\qquad(5\text{-}3\text{-}13)$$

由上式可知，当$x=0, H_{a\perp}=0, Z_{a\perp}=Z_{a\max}=\frac{\mu_0 m_s}{2\pi R^2}$，即$H_{a\perp}=0$和$Z_{a\max}$对应柱体中心。当$Z_a=0$时，有$R^2=x^2$，即$Z_{a\perp}$零值点间距离等于二倍中心埋深；当$x^2>R^2$时，$Z_a$为负值。因此，$Z_{a\perp}$为两边有负值的轴对称曲线，而$H_{a\perp}$为原点对称曲线，且负半轴为正，如图5-3-8所示。

由式（5-3-12），当$i_s=90^\circ$，但I不等于90°，东西剖面时，则有

$$\Delta T=\frac{\mu_0 m_s\sin I}{2\pi\left(x^2+R^2\right)^2}\left(R^2-x^2\right)\qquad(5\text{-}3\text{-}14)$$

当$I=i_s=90^\circ$，式（5-3-14）变为：

$$\Delta T=\frac{\mu_0 m_s\left(R^2-x^2\right)}{2\pi\left(x^2+R^2\right)^2}\qquad(5\text{-}3\text{-}15)$$

对比式（5-3-13）和式（5-3-15），可知当$I=i_s=90^\circ$时，$Z_{a\perp}=\Delta T$。

若为水平磁化，即$I=i_s=0^\circ$时，由式（5-3-10）及式（5-3-11），有：

$$\left.\begin{aligned}&Z_a=H_{a\perp}, H_a=-Z_{a\perp}\\&\Delta T=-Z_{a\perp}\end{aligned}\right\}\qquad(5\text{-}3\text{-}16)$$

由此可知，ΔT受磁化倾角的影响比Z_a大。

若水平圆柱体为斜磁化，即$0^\circ<i_s<90^\circ$，则Z_a、H_a、ΔT均为非对称曲线，见图5-3-8。

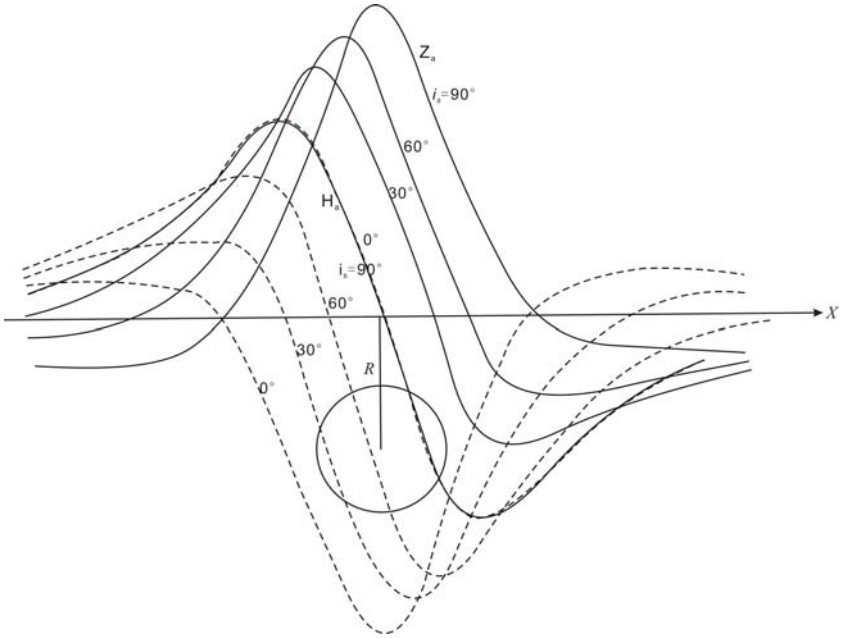


图 5-3-8 水平圆柱体不同i_s时的Z_a、H_a曲线

因$\sin I / \sin i_s \le 1$,且ΔT比Z_a受i_s影响大，故ΔT曲线一般正值小于Z_a，而负值比Z_a负值大。

水平圆柱体和球体的Z_a剖面理论曲线，都是两边有负值的曲线，但其平面等值线图明显不同，球体为均度（或近于等轴状）异常，而水平圆柱体为长带状（或长椭圆状）异常。另外，从其磁场表达式看，不论系数因子、距离衰减因子还是形态因子，二者都有明显差别。

三、板状体

许多地质体都可简化为板状体，如岩墙、岩脉、沉积变质的含铁石英岩系，地台基底中的变质岩系和杂岩系，各种磁性矿脉等。只要它们沿走向长度较大，都可看作是厚度、产状不同的板状体。

板状体被均匀磁化时，仅有面磁荷分布，且同一磁荷面的磁荷密度相同。板状体在地面任一点P产生的磁场，是各个磁荷面在该点产生磁场的总和。因此，计算板状体的磁场可归结为计算磁荷面磁场然后求和。

（一）二度水平和倾斜磁荷面的磁场

1.水平磁荷面的磁场表达式

单个磁荷面是不存在的。一个向下延深很大的磁性厚岩脉，当它为顺层磁化时，仅上、下两个端面有磁荷分布，下端面因埋深很大，在地面引起的磁场可以忽略，可只考虑上顶面引起的磁场。

假定磁荷面与观测面平行，其磁荷面密度$\sigma_m = M_n$，在直角坐标系中，式（5-2-12）磁荷面积分公式变为下式：

$$\left.\begin{aligned} H_{ax} &= \frac{\mu_0}{4\pi}\iint_S \frac{M_n(x-\xi)}{[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\varsigma)^2]^{3/2}}d\xi d\eta \\ H_{ay} &= \frac{\mu_0}{4\pi}\iint_S \frac{M_n(y-\eta)}{[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\varsigma)^2]^{3/2}}d\xi d\eta \\ Z_a &= \frac{\mu_0}{4\pi}\iint_S \frac{M_n(z-\varsigma)}{[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\varsigma)^2]^{3/2}}d\xi d\eta \end{aligned}\right\} \quad (5\text{-}3\text{-}18)$$

若磁荷面沿走向（y 轴方向）为很长（无限长），其截面如图 5-3-9 所示，则上式可写为：

$$\left.\begin{aligned} H_{ax} &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{x_A}^{x_B} M_n(x-\xi)d\xi\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\eta}{[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\varsigma)^2]^{3/2}} \\ H_{ay} &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{x_A}^{x_B} M_n d\xi\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(y-\eta)d\eta}{[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\varsigma)^2]^{3/2}} \\ Z_a &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{x_A}^{x_B} M_n(z-\varsigma)d\xi\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\eta}{[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\varsigma)^2]^{3/2}} \end{aligned}\right\} \quad (5\text{-}3\text{-}19)$$

对上式完成里层的广义积分后，且令 $z=0$， $\varsigma=h$，则有

$$\begin{aligned} H_{ax} &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{x_A}^{x_B}\frac{2M_n(x-\xi)}{(x-\xi)^2+h^2}d\xi \\ H_{ay} &= 0 \\ Z_a &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{x_A}^{x_B}\frac{-2M_n h}{(x-\xi)^2+h^2}d\xi \end{aligned} \quad (5\text{-}3\text{-}20)$$

式中，h 为水平磁荷面的埋深，即 $h=\zeta$。完成以上积分，且注意到：$x_A=-b$，$x_B=b$，板的倾角 $\alpha=i_s$， $M_n=M\cdot n=-M_S\sin\alpha$，则有：

$$\left.\begin{aligned} H_{ax} &= H_a = \frac{\mu_0 M_S\sin a}{4\pi}\ln\frac{(x-b)^2+h^2}{(x+b)^2+h^2} \\ Z_a &= \frac{\mu_0 M_S\sin a}{4\pi}(\arctan\frac{x+b}{h}-\arctan\frac{x-b}{h}) \end{aligned}\right\} \quad (5\text{-}3\text{-}21)$$

若用极坐标，则上式变为：

$$H_a=\frac{\mu_0 M_S\sin a}{2\pi}\ln\frac{r_B}{r_A}, Z_a=\frac{\mu_0 M_S\sin a}{2\pi}\Delta\varphi \quad (5\text{-}3\text{-}22)$$

上式中 $(x-b)^2+h^2=r_B^2$，$(x+b)^2+h^2=r_A^2$，设 r_A 与垂线的夹角为 φ_A，r_B 与垂线的夹角为 φ_B，如图 5-3-9，则有：

$$\arctan\frac{x+b}{h}=\varphi_A,\arctan\frac{x-b}{h}=\varphi_B,\varphi_A-\varphi_B=\Delta\varphi$$

式（5-3-21）和（5-3-22）是研究板状体磁场最基本的公式。

2. 倾斜磁荷面的磁场表达式

如图 5-3-10 所示，设磁荷面与观测平面夹角为 δ，为计算 P 点的磁场，过 P 点作辅助坐标 PX' 和 PZ'，它们分别与倾斜磁荷面平行和垂直。对新坐标系，因为磁荷面密度 $\sigma_m = M_n$，所以有 $Z_a' = \frac{\mu_0 \sigma_m}{2\pi}\Delta\varphi$，$H_{ax}' = \frac{\mu_0 \sigma_m}{2\pi}\ln\frac{r_B}{r_A}$，对原水平直角坐标系，则有：

$$\left.\begin{aligned} H_{ax} &= H_{ax}'\cos\delta - Z_a'\sin\delta \\ Z_a &= H_{ax}'\sin\delta + Z_a'\cos\delta \end{aligned}\right\} \qquad (5\text{-}3\text{-}23)$$

将 Z_a'、H_{ax}' 代入上式，可得：

$$\left.\begin{aligned} H_{ax} &= \frac{\mu_0 \sigma_m}{2\pi}(\cos\delta \cdot \ln\frac{rB}{rA} - \Delta\varphi \cdot \sin\delta) \\ Z_a &= \frac{\mu_0 \sigma_m}{2\pi}(\Delta\varphi \cdot \cos\delta + \ln\frac{r_B}{r_A}\sin\delta) \end{aligned}\right\} \qquad (5\text{-}3\text{-}24)$$

由以上的讨论可知，有了水平磁荷面的磁场表达式，利用转轴（或坐标变换）的方法很容易求得倾斜磁荷面的磁场表达式。由以下的讨论可以看出，有了水平和倾斜磁荷面的磁场表达式，很容易求得板状体的磁场表达式。

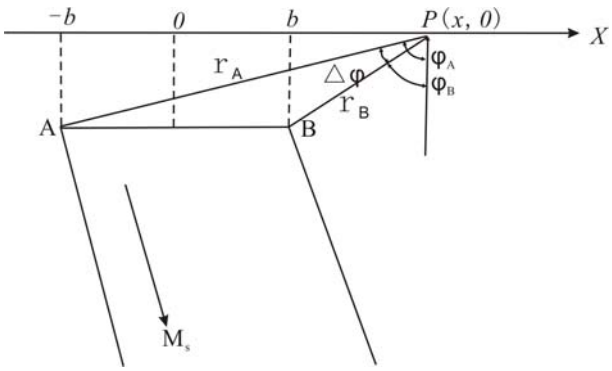


图 5-3-9 二度水平磁荷面坐标示意图

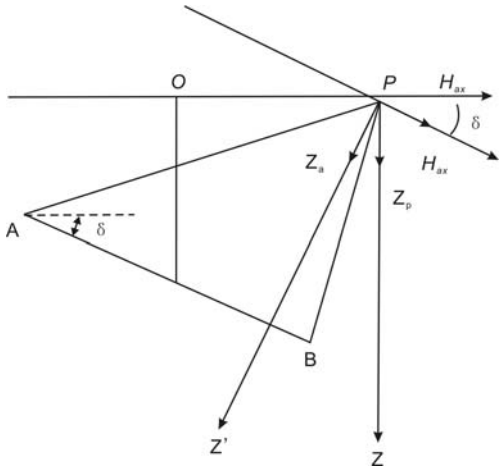


图 5-3-10 倾斜磁荷面及坐标示意图

（二）无限走向、有限延深厚板状体的磁场表达式

前面已经提到，在自然界不存在无限长或无限延深的地质体，仅是为了研究和解释方便，在一定误差范围内把有限延长（或延深）的地质体看作是无限延长或延深的地质体。根据理

论计算，当磁性体长度 $2L$ 与埋深 h 之比大于 10 时，$Z_{a\infty}$ 与 Z_{a2L} 的差别小于 6%。通常把 Z_a 等值线的长轴与短轴之比大于或等于 3 的情况当作地质体走向为无限长的情况。

如图 5-3-11 所示，斜磁化板状体沿走向无限延长，其它参量如图所示。由图可知：

$\alpha = i_s + \gamma$，即 $\gamma = \alpha - i_s$；

$|\sigma'_{AB}| = \sigma_{CD} = M_s \cdot \sin i_s$，

$|\sigma'_{AC}| = \sigma'_{BD} = M_s \cdot \sin\gamma$。

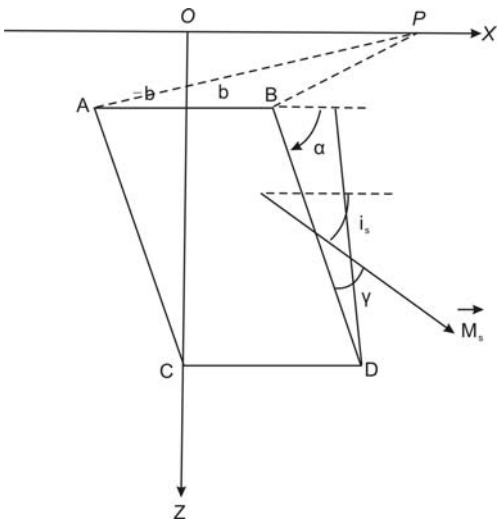


图 5-3-11 有限深厚板状体坐标示意图

该板状体在 P 点的磁场是六个磁荷面分别在 P 点产生磁场之和。由于其走向端面位于无限远，这两端面在 P 点的磁场视为零，因此，板状体磁场可表示为：

$$\left.\begin{aligned} Z_a &= \frac{\mu_0 M_S \sin a}{2\pi}[\sin\gamma \ln\frac{r_B}{r_A} + \cos\gamma\cdot(\varphi_A - \varphi_B)] \\ H_{ax} &= \frac{\mu_0 M_S \sin a}{2\pi}[\cos\gamma \ln\frac{r_B}{r_A} - \sin\gamma\cdot(\varphi_A - \varphi_B)] \end{aligned}\right\} \quad (5\text{-}3\text{-}25)$$

将式（5-3-21）、式（5-3-22）代入式（5-3-25），并考虑到磁荷面的正、负以及磁荷密度的对应关系，利用三角公式：$\sin i_s = \sin(\alpha - \gamma) = \sin\alpha\cos\gamma - \cos\alpha\sin\gamma$，代入后经整理合并，得：

$$\left.\begin{aligned} Z_a &= \frac{\mu_0 M_S \sin\alpha}{2\pi}\left\{\sin\gamma \ln\frac{r_B\cdot r_C}{r_A\cdot r_D} + \cos\gamma\left[(\varphi_A - \varphi_B) - (\varphi_C - \varphi_D)\right]\right\} \\ H_{aX} &= \frac{\mu_0 M_S \sin\alpha}{2\pi}\left\{\cos\gamma \ln\frac{r_B\cdot r_C}{r_A\cdot r_D} - \sin\gamma\left[(\varphi_A - \varphi_B) - (\varphi_C - \varphi_D)\right]\right\} \end{aligned}\right\} \quad (5\text{-}3\text{-}26)$$

据式（5-3-26），且地磁场方向与磁化强度方向一致，同理可得：

$$\Delta T = \frac{\mu_0 M_S \sin\alpha}{2\pi}\cdot\frac{\sin I}{\sin i_s}\left\{\cos(\alpha - 2i_s)\ln\frac{r_B\cdot r_C}{r_A\cdot r_D} - \sin(\alpha - 2i_s)\left[(\varphi_A - \varphi_B) - (\varphi_C - \varphi_D)\right]\right\}$$

式（5-3-26）是二度板状体的一般表达式。当板状体的几何尺度变化时，如向下无限延深或沿一侧无限变宽，都可由上式简化出其磁场表达式。

（三）走向、延深无限厚板状体的磁场表达式

当板状体向下无限延深时，则 $r_C \approx r_D, \varphi_C \approx \varphi_D$，这时式（5-3-26）可简化为：

$$\left.\begin{aligned} Z_a &= \frac{\mu_0 M_S \sin\alpha}{2\pi}\left[\sin\gamma \ln\frac{r_B}{r_A} + \cos\gamma\left(\varphi_A - \varphi_B\right)\right] \\ H_{aX} &= \frac{\mu_0 M_S \sin\alpha}{2\pi}\left[\cos\gamma \ln\frac{r_B}{r_A} - \sin\gamma\left(\varphi_A - \varphi_B\right)\right] \end{aligned}\right\} \quad (5\text{-}3\text{-}27)$$

用直角坐标，上式可写为

$$\left.\begin{aligned} Z_a &= \frac{\mu_0 M_S \sin\alpha}{2\pi}\left[\frac{1}{2}\sin\gamma \ln\frac{(x-b)^2+h^2}{(x+b)^2+h^2} + \cos\gamma\left(tg^{-1}\frac{x+b}{h} - tg^{-1}\frac{x-b}{h}\right)\right] \\ H_{aX} &= \frac{\mu_0 M_S \sin\alpha}{2\pi}\left[\frac{1}{2}\cos\gamma \ln\frac{(x-b)^2+h^2}{(x+b)^2+h^2} - \sin\gamma\left(tg^{-1}\frac{x+b}{h} - tg^{-1}\frac{x-b}{h}\right)\right] \end{aligned}\right\} \quad (5\text{-}3\text{-}28)$$

根据式（5-2-22），可得

$$\begin{aligned} \Delta T = {} & \frac{\mu_0 M_S \sin\alpha}{2\pi}\cdot\frac{\sin I}{\sin i_s}\left[\frac{1}{2}\cos(\alpha - 2i_s)\ln\frac{(x-b)^2+h^2}{(x+b)^2+h^2}\right. \\ & \left. - \sin(\alpha - 2i_s)\cdot\left(\arctan\frac{x+b}{h} - \arctan\frac{x-b}{h}\right)\right] \end{aligned} \quad (5\text{-}3\text{-}29)$$

（四）厚板状体的磁场特征

由于板状体有倾向，一般其截面为非轴对称型，只有当板状体的倾角 $\alpha = 90^\circ$，即直立时，特定方向磁化，其磁场表达式及其磁场曲线形态才简单。一般顺层磁化无限延深时其磁场表达式及剖面曲线形态，可作为了解板状体磁场特征的基础。

当为顺层磁化时，$\gamma = 0^\circ$，由式（5-3-28）有

$$\left.\begin{aligned} H_{ax} &= \frac{\mu_0 M_S \sin a}{4\pi}\ln\frac{(x-b)^2+h^2}{(x+b)^2+h^2} \\ Z_a &= \frac{\mu_0 M_S \sin a}{2\pi}\left(\arctan\frac{x+b}{h} - \arctan\frac{x-b}{h}\right) \\ &= \frac{\mu_0 M_S \sin a}{2\pi}\arctan\frac{2bh}{x^2-b^2+h^2} \end{aligned}\right\} \quad (5\text{-}3\text{-}30)$$

由上式可知，Z_a 剖面曲线对称于 Z 轴，且无负值；H_{aX} 曲线对称于原点；ΔT 曲线相当于 Z_a 和 H_{aX} 分别乘以不同角函数后的合成。其曲线形态如图 5-3-12。

当 $\gamma = 90^\circ$（相当于直立板水平磁化）时，则　重新做图 5-3-12

$$\left.\begin{aligned} Z_a &= \frac{\mu_0 M_S \sin a}{4\pi}\ln\frac{(x-b)^2+h^2}{(x+b)^2+h^2} \\ H_{ax} &= \frac{-\mu_0 M_S \sin a}{2\pi}\left(\arctan\frac{x+b}{h} - \arctan\frac{x-b}{h}\right) \end{aligned}\right\} \quad (5\text{-}3\text{-}31)$$

式（5-3-30）和式（5-3-31）表明：当角γ由0°变为90°时，Z_a曲线由轴对称变为原点对称；而H_{aX}由原点对称变为反向轴对称。ΔT曲线也相应发生变化。

当$0<\gamma<90°$时，Z_a为非对称曲线，其不对称性随γ增大而增强，$Z_{a\max}>Z_{a\min}$。

若$\gamma>90°$，则$\left|Z_{a\min}\right|>Z_{a\max}$。

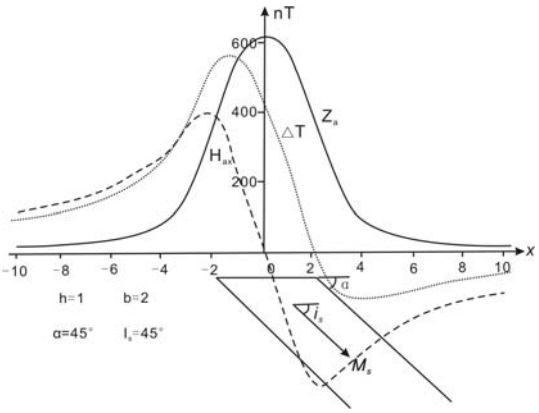


图 5-3-12 顺层磁化厚板Z_a、H_a、ΔT曲线

如把顺层磁化时的Z_a、H_{aX}表示为$Z_{a//}$、$H_{aX//}$，则式（5-3-28）可写成以下形式：

$$\left.\begin{aligned} Z_a &= Z_{a//}\cos\gamma + H_{aX//}\sin\gamma \\ H_{aX} &= H_{aX//}\cos\gamma - Z_{a//}\sin\gamma \end{aligned}\right\} \qquad (5\text{-}3\text{-}32)$$

由于$Z_{a//}$、$H_{aX//}$的曲线形态简单，利用上式更易于分析斜磁化时的Z_a、H_{aX}的曲线特征。当M与T_0方向一致时，把式（5-3-29）改写为：

$$\Delta T=\frac{\mu_0 M_S\sin\alpha}{2\pi}\cdot\frac{\sin I}{\sin i_s}\left[\frac{1}{2}\sin\left(90^\circ+\alpha-2i_s\right)\ln\frac{(x-b)^2+h^2}{(x+b)^2+h^2}\right.$$

$$\left.+\cos\left(90^\circ+\alpha-2i_s\right)\left(tg^{-1}\frac{x+b}{h}-tg^{-1}\frac{x-b}{h}\right)\right] \qquad (5\text{-}3\text{-}33)$$

则上式可写为：

$$\Delta T=K\left(Z_{a//}\cos\theta+H_{aX//}\sin\theta\right) \qquad (5\text{-}3\text{-}34)$$

上式中$K=\sin I/\sin i_s$，$\theta=90^\circ+\alpha-2i_s$。由此可见，斜磁化二度板状体的$\Delta T$剖面曲线特征可类似于分析$Z_a$一样进行，但要注意$K$和$\theta$的含义。

（五） 薄板状体的磁场

1. 走向无限、延深无限薄板状体的磁场

薄板状体可看作是厚板的特殊情况。在磁法勘探中的“厚”与“薄”也是一个相对的概念。在一定限度内当板状体的$2b<<h$时，称其为薄板，反之为厚板。薄板的磁场表达式可从厚板的磁场表达式简化导出。可将式（5-3-21）中的反正切项和对数项展开成b/h的级数，然后略去b/h的高次项，即可得薄板的磁场表达式。

根据级数展开式

$$tg^{-1}x=\frac{x}{1}-\frac{x^2}{3}+\frac{x^5}{5}-... \qquad (|x|<1)$$

$$\ln x=2\left[\frac{x-1}{x+1}+\frac{1}{3}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^5+...\right] \qquad (x>0)$$

则有

$$tg^{-1}\frac{2bh}{x^2-b^2+h^2}\cong\frac{2bh}{x^2+h^2},\quad \ln\frac{(x-b)^2+h^2}{(x+b)^2+h^2}\cong 2\frac{-2bx}{h^2+x^2}$$

将以上关系式代入式（5-3-28），（5-3-29），即得薄板状体磁场的表达式

$$\left.\begin{aligned}
Z_a&=\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{2bM_S\sin\alpha}{x^2+h^2}\left(h\cos\gamma-x\sin\gamma\right)\\
H_{aX}&=\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{-2bM_S\sin\alpha}{x^2+h^2}\left(h\sin\gamma+x\cos\gamma\right)\\
\Delta T&=-\frac{\mu_0 2bM_S\sin\alpha}{2\pi\left(x^2+h^2\right)}\frac{\sin I}{\sin i_s}\left[h\sin\left(\alpha-2i_s\right)+x\cos\left(\alpha-2i_s\right)\right]
\end{aligned}\right\} \qquad (5\text{-}3\text{-}35)$$

以上关系式与式（5-3-28）和式（5-3-29）相比较，其函数关系简化了，其表达式形式基本类似，均由不同的偶函数和奇函数组成。因此，由上式决定的磁场特征与厚板类似，例如，当$\gamma=0°$，即当顺层磁化$\alpha=i_s$时，

$$\left.\begin{aligned}
Z_{a//}&=\frac{\mu_0 2bM_S\sin\alpha\cdot h}{2\pi(x^2+h^2)}\\
H_{ax//}&=-\frac{\mu_0 2bM_S\sin\alpha\cdot x}{2\pi(x^2+h^2)}
\end{aligned}\right\} \qquad (5\text{-}3\text{-}36)$$

这时$Z_{a//}$为无负值的轴对称曲线，$H_{ax//}$为原点对称曲线，与厚板情况相同。当$\gamma\neq 0°$时，由式（5-3-35）可看出，$Z_{a//}$、$H_{ax//}$随γ角的变化规律与厚板完全相同。由此可见，板状体的磁场剖面特征，主要由γ角（$\gamma=\alpha-i_s$）决定；只要γ保持一定，对不同组合的α和i_s，其Z_a、H_{aX}曲线形态不变。图 5-3-13 是薄板状体的Z_a随γ角的变化曲线。

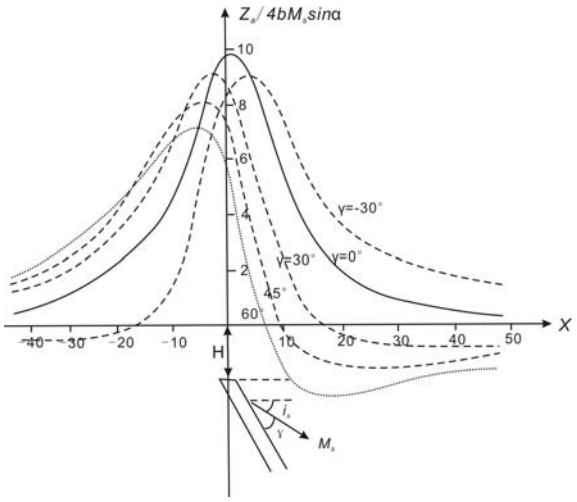


图 5-3-13 不同 γ 角薄板 Z_a 剖面曲线

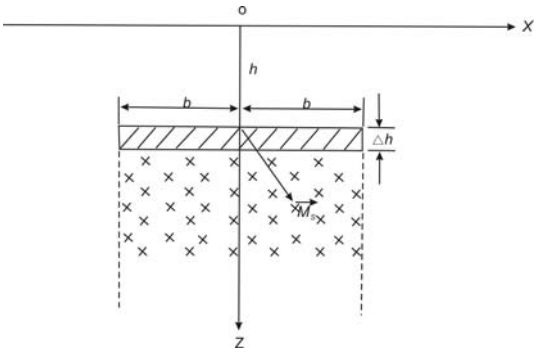


图 5-3-14 水平薄板示意图

2. 水平薄板状体磁场

水平薄板状体的磁场也可利用式（5-3-28）求导得出。相当于令式（5-3-28）中 $\alpha=90^{\circ}$，由顶深分别为 h 和 $h+\Delta h$ 的两个厚板状体磁场表达式相减得到，可表示为：

$$Z_a = Z_a(h) - Z_a(h+\Delta h)$$

见图 5-3-14。当 Δh 很小时，上式可写为；

$$Z_a = \frac{\partial Z_a(h)}{\partial h}\Delta h$$

可见，由式（5-3-28）对 h 求一次微商，即得水平薄板的磁场表达式。令 $m_s = M_S \cdot 2b\Delta h$，其形式为：

$$\left.\begin{aligned} Z_a &= \frac{\mu_0 m_S}{2\pi}\frac{(h^2+b^2-x^2)\sin i_s - 2hx\cos i_s}{[(x-b)^2+h^2][(x+b)^2+h^2]} \\ H_{ax} &= \frac{-\mu_0 m_S}{2\pi}\frac{2hx\sin i_s + (h^2+b^2-x^2)\cos i_s}{[(x-b)^2+h^2][(x+b)^2+h^2]} \\ \Delta T &= \frac{-\mu_0 m_S}{2\pi}\frac{\sin I}{\sin i_s}\frac{2hx\sin 2i_s + (h^2+b^2-x^2)\cos 2i_s}{[(x-b)^2+h^2][(x+b)^2+h^2]} \end{aligned}\right\} \quad (5\text{-}3\text{-}37)$$

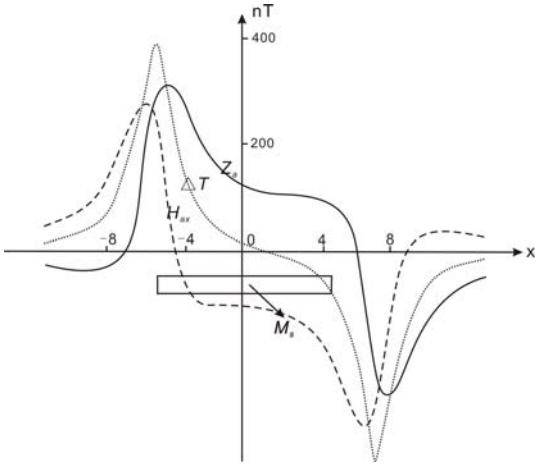


图 5-3-15 水平薄板磁异常剖面曲线

（$h=1,2b=10,\Delta h=1,\alpha=90°$）

当$i_s=90^{\circ}$时，上式可进一步简化，即式中$\cos i_s$项为零，Z_a为偶函数，其剖面曲线为两边有负值的轴对称曲线。H_{aX}为奇函数，其剖面曲线为点对称曲线。若$0<i_s<90°$，则其剖面曲线为非对称曲线，图 5-3-15 为水平薄板的Z_a、H_{aX}、ΔT剖面曲线图。

四、台阶

除前面讨论的规则形体外，磁性火成岩接触带、磁性地层的褶皱，常可将其简化为台阶、向斜磁性层。这些形体在均匀磁化条件下，其磁场都可看作是不同磁荷面磁场的组合。

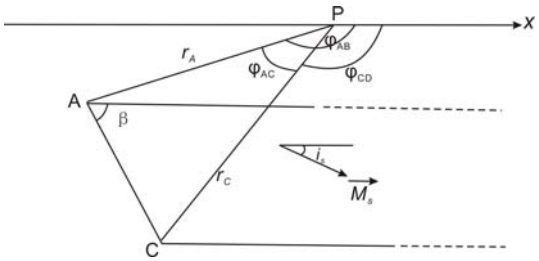


图 5-3-16 台阶示意图

图 5-3-16 所示为磁性接触带台阶，可将其看作是有限延深二度板状的特例，即一个层面趋于无穷远的情况。当 *B*、*D* 面趋于无限远时，$r_D\approx r_B$，$\varphi_D\approx\varphi_B=\dfrac{\pi}{2}$，因此，由（5-3-26）式可得台阶的磁场表达式

$$\left.\begin{aligned}
Z_a &= \pm\frac{2\mu_0 M_s\sin\beta}{2\pi}\left[\sin\gamma\ln\frac{r_C}{r_A}+\cos\gamma(\varphi_A-\varphi_C)\right]\\
H_{ax} &= \pm\frac{2\mu_0 M_s\sin\beta}{2\pi}\left[\cos\gamma\ln\frac{r_c}{r_A}-\sin\gamma(\varphi_A-\varphi_C)\right]\\
\Delta T &= \pm\frac{2\mu_0 M_s\sin\beta}{2\pi}\frac{\sin I}{\sin i_s}\left[\cos(\beta-2i_s)\ln\frac{r_c}{r_A}-\sin(\beta-2i_s)(\varphi_A-\varphi_C)\right]
\end{aligned}\right\}\qquad(5\text{-}3\text{-}38)$$

上式中当磁性层沿 *X* 轴正向延伸时，取正号，反之取负号。ΔT 的公式只考虑感应磁化（或 ***M*** 与 ***T0*** 方向一致）的情况。式中β表示接触面的倾角，$\gamma=\beta-i_s$，由 *x* 轴正方向起算。

图 5-3-17 是倾斜接触面台阶的磁异常剖面图。由图可知，Z_a、H_{ax}、ΔT均为不对称曲线。当接触面垂直，即β=90°，若i_s=90°，Z_a为原点对称曲线，见图 5-3-18。

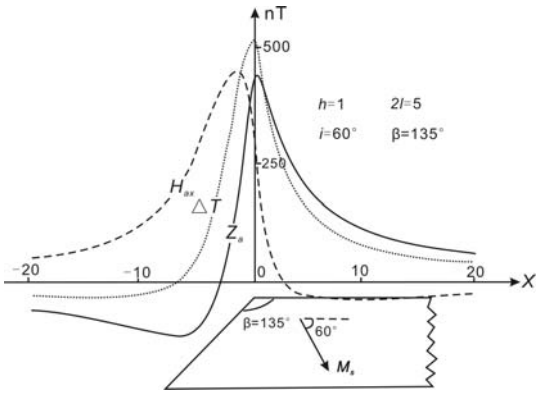


图 5-3-17 台阶磁异常示意图

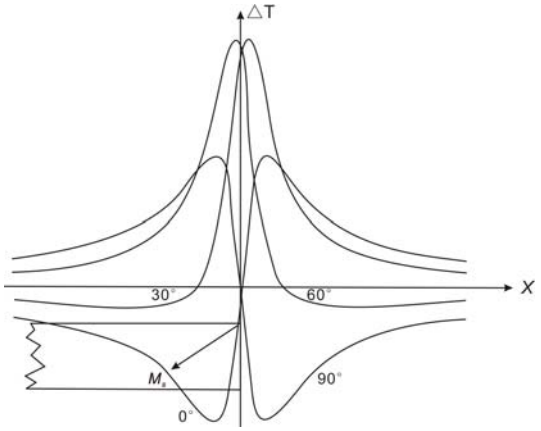


图 5-3-18 不同 i_s 的垂直接触台阶 ΔT 剖面图

五、背斜

当磁性沉积层或其他磁性层褶皱时，会产生背斜或向斜等构造。这种构造在均匀磁化的条件下，都可用磁荷面磁场叠加求和的方法来研究其磁场。

若有一两翼对称的背斜磁性岩层，且两翼向下无限延深；设 h 为背斜顶端的埋藏深度，H 为背斜顶端下缘的深度，θ 是该对称背斜的倾角，如图 5-3-19 所示。

由图可知，背斜层实际由四个磁荷面组成，每个磁荷面的磁荷面密度代换量 $|\sigma'_m| = M_s \sin(\theta - i_s)$，因此，利用式（5-3-24）求出每个磁荷面的磁场，而后求和即可得背斜层的磁场表达式。在计算时，考虑无限延深的假设，即 $r_D \approx r_B$，$r_E \approx r_F$，以及 $\varphi_B = \varphi_D, \varphi_E = \varphi_F$，则可推导一下磁场表达式。

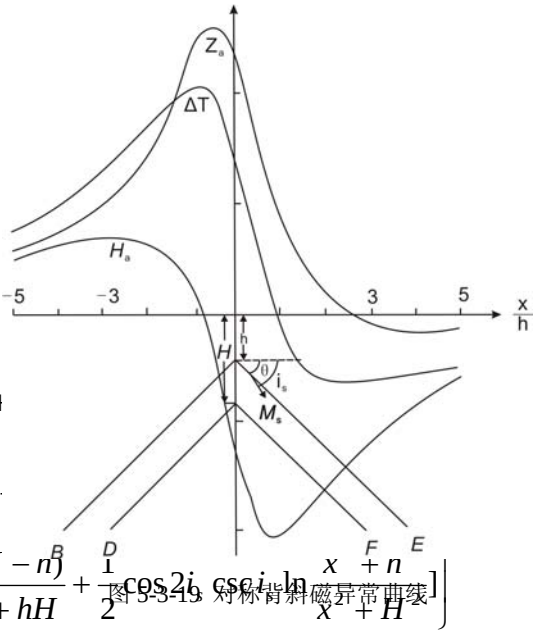


图 5-3-19 对称背斜磁异常曲线

$$Z_a = \frac{-\mu_0 2M_s \sin 2\theta}{2\pi}[\cos i_s \arctan\frac{x(H-h)}{x^2+hH} +$$

$$H_{ax} = \frac{\mu_0 2M_s \sin 2\theta}{2\pi}[-\sin i_s \arctan\frac{x(H-h)}{x^2+hH}$$

$$\Delta T = \frac{\mu_0 2M_s \sin 2\theta \sin I}{2\pi \sin i_s}\left[-2\cos i_s \arctan\frac{x(H-h)}{x^2+hH} + \frac{1}{2}\cos 2i_s \csc i_s \ln\frac{x^2+n^2}{x^2+H^2}\right]$$

（5-3-39）

图 5-3-19 给出了对称背斜的 Z_a、H_a、ΔT 磁异常曲线。

六、二度多边形截面水平柱体

截面为任意多边形的水平主体的磁场，可以看作是以多边形的边为接触线的许多磁性层的磁场的代数和。如图 5-3-20 所示水平柱体，显然，可把 IV 加 V 两层减去 I、II、III 层即得截面为 *ABCDE* 的走向无限长柱体的磁场。对于第 AE 边所组成的接触面的磁场，设计算点位于坐标原点，根据（5-3-38）式，考虑 $\gamma=\beta-i_s$，$M_x=M_S\cos i_s$，$M_z=M_S\sin i_s$，有：

$$\left.\begin{aligned}
&H_{ax}=\frac{\mu_0}{2\pi}\{2M_x[\sin\beta\cos\beta\ln\frac{r_E}{r_A}-\sin^2\beta(\theta_A-\theta_E)]\\
&+2M_z[\sin^2\beta\ln\frac{r_E}{r_A}+\sin\beta\cos\beta(\theta_A-\theta_E)]\}=\frac{\mu_0}{2\pi}(2M_xP_i+2M_zQ_i)\\
&Z_a=\frac{\mu_0}{2\pi}\{2M_x[\sin^2\beta\ln\frac{r_E}{r_A}+\sin\beta\cos\beta(\theta_A-\theta_E)]\\
&-2M_z[\sin\beta\cos\beta\ln\frac{r_E}{r_A}-\sin^2\beta(\theta_A-\theta_E)]\}=\frac{\mu_0}{2\pi}(2M_xQ_i-2M_zP_i)
\end{aligned}\right\}\qquad(5\text{-}3\text{-}40)$$

设 E 点坐标为（ξ_i,ζ_i），A 点的坐标为（ξ_{i+1},ζ_{i+1}），则上式中 P_i 及 Q_i 可表示为

$$\left.\begin{aligned}
P_i&=\frac{1}{2}\frac{(\xi_i-\xi_{i+1})(\zeta_i-\zeta_{i+1})}{(\xi_i-\xi_{i+1})^2+(\zeta_i-\zeta_{i+1})^2}\ln\frac{\xi_i^2+\zeta_i^2}{\xi_{i+1}^2+\zeta_{i+1}^2}\\
&-\frac{(\zeta_i-\zeta_{i+1})^2}{(\xi_i-\xi_{i+1})^2+(\zeta_i-\zeta_{i+1})^2}\arctan\frac{\zeta_i\xi_{i+1}-\xi_i\zeta_{i+1}}{\xi_i\xi_{i+1}+\zeta_i\zeta_{i+1}}\\
Q_i&=\frac{1}{2}\frac{(\zeta_i-\zeta_{i+1})^2}{(\xi_i-\xi_{i+1})^2+(\zeta_i-\zeta_{i+1})^2}\ln\frac{\xi_i^2+\zeta_i^2}{\xi_{i+1}^2+\zeta_{i+1}^2}\\
&+\frac{(\zeta_i-\zeta_{i+1})(\xi_i-\xi_{i+1})}{(\xi_i-\xi_{i+1})^2+(\zeta_i-\zeta_{i+1})^2}\arctan\frac{\zeta_i\xi_{i+1}-\xi_i\zeta_{i+1}}{\xi_i\xi_{i+1}+\zeta_i\zeta_{i+1}}
\end{aligned}\right\}\qquad(5\text{-}3\text{-}41)$$

因此，若顺时针方向绕过 *ABCDEA* 等，则坐标原点的磁场可表示为

$$\left.\begin{aligned}
H_{ax}&=\frac{\mu_0}{2\pi}\sum_{i=1}^{N+1}(2M_xP_i+2M_zQ_i)\\
Z_a&=\frac{\mu_0}{2\pi}\sum_{i=1}^{N+1}(2M_xQ_i-2M_zP_i)
\end{aligned}\right\}\qquad(5\text{-}3\text{-}42)$$

式中 N 为边数，最后一点与最初一点重合，即 $\xi_{N+1}=\xi_1,\zeta_{N+1}=\zeta_1$。由上述关系式可进一步得到截面为等腰梯形的水平圆柱体与三角柱体的磁场。

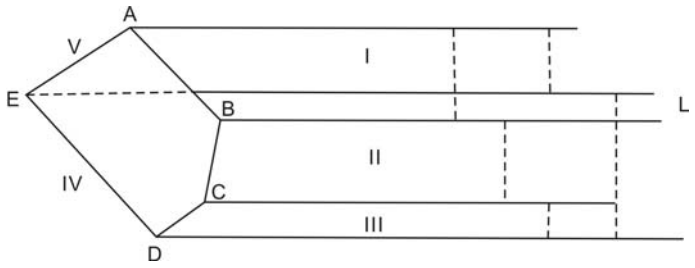


图 5-3-20 台阶磁异常剖面图

*第四节 二度半多边形截面水平柱体

R.Rasmussen, Pedersen L. B.（1979）推导了二度半多边形截面柱体的磁场。其思路是首先推导二度半多边形截面柱体的重力场表达式，再根据重磁位之间关系的泊松公式得出二度半多边形截面柱体的磁场表达式。截面为多边形的有限长水平柱体如图 5-4-1 所示，把新坐标系u,v,w旋转φ_i角，使 u 轴与 1 号边所在的水平面平行，计算 1 号边为接触面，长度为 2y,向 w 方向延伸的密度层的重力场。用同样方法分别计算 2，3，4，5 号边的密度层的重力场并求代数和，就可以得到二度半多边形截面柱体的重力场。

一、 重力场

如图 5-4-1 所示，设二度半多边形截面柱体的密度为σ，磁化强度为M，我们可以得到重力场的垂直分量$\Delta g_z(\boldsymbol{r}_0)$为：

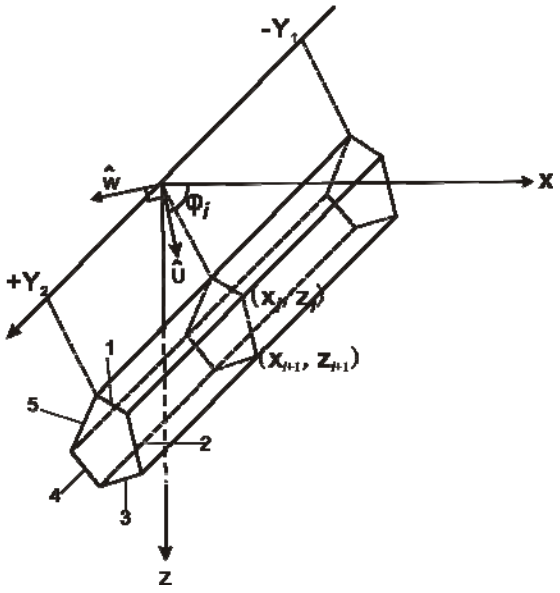


图 5-4-1

$$\Delta g_z(\boldsymbol{r}_0)=G\sigma\int_V \boldsymbol{z}\cdot\nabla_{r_0}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|}dV=-G\sigma\int_V \boldsymbol{z}\cdot\nabla_{r}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|}dV$$

$$= -G\sigma \int_S \boldsymbol{z}\cdot\boldsymbol{n}_i \frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|} dS \cong -G\sigma \sum_i \boldsymbol{z}\cdot\boldsymbol{n}_i \int_{S_i} \frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|} dS \qquad (5\text{-}4\text{-}1)$$

上式中，i=1，2，3，4，5。$\boldsymbol{n}_i$、S_i分别表示二度半多边形截面柱体的第i个面的外法向矢量和面积。可以看出，二度半模型体的端面并未对积分结果产生影响。为了得到该二度半模型的重力场，下面来计算（1）式中的面积分$\int_{S_i} \frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|} dS$。

令$\boldsymbol{r}_0 = \boldsymbol{0}$，将图 5-4-1 中的坐标系（$x, y, z$）旋转到一个新的坐标系（$u, v, w$），其中$\boldsymbol{u}$与二度半多边形截面柱体的任一面平行，且$\boldsymbol{u} \sim (x_{i+1}-x_i, 0, z_{i+1}-z_i) = (\Delta x_i, 0, \Delta z_i)$，$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{y}$，$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}$。定义$\alpha_i = \tan\varphi_i = \Delta z_i / \Delta x_i$，可以得到：

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \cos\varphi_i & \sin\varphi_i \\ -\sin\varphi_i & \cos\varphi_i \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ z \end{Bmatrix} \qquad (5\text{-}4\text{-}2)$$

因此$w_{i+1} = w_i = -\sin\varphi_i x_i + \cos\varphi_i z_i$，$u_i = \cos\varphi_i x_i + \sin\varphi_i z_i$，$u_{i+1} = \cos\varphi_i x_{i+1} + \sin\varphi_i z_{i+1}$。

对于一个对称的二度半模型体，有$Y_1 = Y_2 = Y$，故整个面积分$\int_{S_i} \frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|} dS$可以表示为：

$$\int_{S_i} \frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|} dS = \int_{-Y}^{Y} dy \int_{u_i}^{u_{i+1}} \frac{I}{\left(u^2+y^2+w_i^2\right)^{1/2}} du = 2I_1(Y,i) \qquad (5\text{-}4\text{-}3)$$

其中：

$$\begin{aligned} I_1(Y,i) &= \int_0^Y dy \int_{u_i}^{u_{i+1}} \frac{1}{(u^2+\omega_i^2+y^2)^{1/2}} du \\ &= \int_0^Y dy[\ln(u_{i+1}+(u_{i+1}^2+\omega_i^2+y^2)^{1/2}) - \ln(u_i+(u_i^2+\omega_i^2+y^2)^{1/2})] \\ &= I_{1a}(Y,i) - I_{1b}(Y,i) \end{aligned} \qquad (5\text{-}4\text{-}4)$$

$$I_{1a}(Y,i) = \int_0^Y \ln(u_{i+1}+(u_{i+1}^2+\omega_i^2+y^2)^{1/2}) dy$$

$$I_{1b}(Y,i) = \int_0^Y \ln(u_i+(u_i^2+\omega_i^2+y^2)^{1/2}) dy$$

考虑

$$I_{1a}(Y,i)=[y\ln(u_{i+1}+(u_{i+1}^2+\omega_i^2+y^2)^{1/2})]_0^Y$$
$$-\int_0^Y \frac{y^2}{u_{i+1}+(u_{i+1}^2+\omega_i^2+y^2)^{1/2}}\cdot\frac{1}{(u_{i+1}^2+\omega_i^2+y^2)^{1/2}}dy \quad (5\text{-}4\text{-}5)$$
$$=I_{1aa}(Y,i)-I_{1ab}(Y,i)$$

$$I_{1aa}(Y,i)=Y\ln(u_{i+1}+(u_{i+1}^2+\omega_i^2+Y^2)^{1/2})$$

$$I_{1ab}(Y,i)=\int_0^Y \frac{y^2}{u_{i+1}+(u_{i+1}^2+\omega_i^2+y^2)^{1/2}}\cdot\frac{1}{(u_{i+1}^2+\omega_i^2+y^2)^{1/2}}dy$$

积分 $I_{1ab}(Y,i)$ 通过下列式求解：

令 $p=u_{i+1}+(u_{i+1}^2+\omega_i^2+y^2)^{1/2}$，则 $dp=(p^2-2pu_{i+1}-\omega_i^2)^{1/2}/(u_{i+1}^2+\omega_i^2+y^2)dy$

由此，$I_{1ab}(Y,i)$ 可简化为

$$I_{1ab}(Y,i)=\int_{p(0)}^{p(Y)}(p^2-2pu_{i+1}-\omega_i^2)^{1/2}/p\,dp$$
$$=Y+\omega_i[actg\frac{r_{i+1}^2+u_{i+1}R_{i+1}}{2\omega_i Y}-\frac{\pi}{2}]-u_{i+1}\ln\frac{Y+R_{i+1}}{r_{i+1}} \quad (5\text{-}4\text{-}6)$$

其中：$R_{i+1}=(u_{i+1}^2+\omega_i^2+Y^2)^{1/2}; r_{i+1}=(u_{i+1}^2+\omega_i^2)^{1/2}$。故有：

$$I_1(Y,i)=Y\ln(u_{i+1}+R_{i+1})-Y-\omega_i[arctg\frac{r_{i+1}^2+u_{i+1}R_{i+1}}{\omega_i Y}-\frac{\pi}{2}]$$
$$+u_{i+1}\ln\frac{Y+R_{i+1}}{r_{i+1}}-Y\ln(u_i+R_i)+Y+\omega_i[arctg\frac{r_i^2+u_iR_i}{\omega_i Y}-\frac{\pi}{2}]-u_i\ln\frac{Y+R_1}{r_i} \quad (5\text{-}4\text{-}7)$$

由等式 $arctg\frac{r_{i+1}^2+u_{i+1}R_{i+1}}{\omega_i Y}-arctg\frac{r_i^2+u_iR_i}{\omega_i Y}=arctg\frac{u_{i+1}Y}{\omega_i R_{i+1}}-arctg\frac{u_iY}{\omega_i R_i}$，得到：

$$I_1(Y,i)=Y\ln\frac{u_{i+1}+R_{i+1}}{u_i+R_i}-\omega_i[arctg\frac{u_{i+1}Y}{\omega_i R_{i+1}}-arctg\frac{u_iY}{\omega_i R_i}]+u_{i+1}\frac{Y+R_{i+1}}{r_{i+1}}-u_i\ln\frac{Y+R_i}{r_i} \quad (5\text{-}4\text{-}8)$$

综合式（5-4-1）、（5-4-3）、（5-4-8）可以得到：

$$\Delta g_z(\boldsymbol{r}_0)=-2YG\sigma\sum_i \boldsymbol{z}\cdot\boldsymbol{n}_i\log\frac{u_{i+1}+R_{i+1}}{u_i+R_i}+$$
$$2G\sigma\sum_i -\frac{x_iz_{i+1}-z_ix_{i+1}}{\Delta x_i^2+\Delta z_i^2}\left\{\Delta z_i\log\frac{r_{i+1}(Y+R_i)}{r_i(Y+R_i)}+\Delta x_i\left(\tan^{-1}\frac{u_{i+1}Y}{w_iR_{i+1}}-\tan^{-1}\frac{u_iY}{w_iR_i}\right)\right\} \quad (5\text{-}4\text{-}9)$$

当 $Y\to\infty$ 时，就得到了 Talwani（1973）年给出的二度体重力场公式。上式中第一项趋

近于零，第二项就是 Talwani 表达式。同样的，我们也可得到不对称二度半模型体的表达式，此时整个面积分可表示为：

$$\int_{S_i}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|}dS=\int_{-Y}^{Y}dy\int_{u_i}^{u_{i+1}}\frac{1}{\left(u^2+y^2+w_i^2\right)^{1/2}}du=I_1\left(Y_2,i\right)+I_1\left(Y_1,i\right)\quad\text{（5-4-10）}$$

不难发现 $\Delta g_z\left(\vec{r}_0\right)$ 的表达式类似于（5-4-8）式。

二 磁场

一个均匀磁化且密度均匀的物体，其磁位和引力位的解析式间存在一定的关系式，利用这种关系，我们可较方便地计算磁性体的磁场。

由泊松公式：
$$\Delta B_e\left(\boldsymbol{r}_0\right)=\frac{1}{4\pi}\cdot\frac{M}{G\sigma}\left(\boldsymbol{m}\cdot\nabla\boldsymbol{r}_0\right)\Delta g_e\left(\boldsymbol{r}_0\right)\quad\text{（5-4-11）}$$

式中，$\Delta B_e\left(\boldsymbol{r}_0\right)$ 和 $\Delta g_e\left(\boldsymbol{r}_0\right)$ 分别为磁场和重力场沿着 $\hat{e}$ 方向的分量，$\boldsymbol{m}\left(=\frac{\boldsymbol{M}}{M}\right)$ 是磁化强度的方向，M 是地质体的磁化强度。

我们首先从式（5-4-1）和式（5-4-11）中得到 ΔB_z：

$$\Delta B_z\left(\boldsymbol{r}_0\right)=-\frac{\mu_0}{4\pi}\sum_i\boldsymbol{z}\cdot\boldsymbol{n}_i\left(M_x\left(I_2\left(Y,i\right)-I_2\left(-Y,i\right)\right)+M_z\left(I_3\left(Y,i\right)-I_3\left(-Y,i\right)\right)\right)$$

（5-4-12）

$M_x=M\cos\alpha=M\cos I\cos D$，$M_z=M\cos\gamma=M\sin I$

与 $I_1\left(Y,i\right)$ 的推导过程相似，我们可以得到：

$$\begin{aligned}I_2(Y,i)&=\int_0^Y dy\int_{u_i}^{u_{i+1}}\frac{\cos\varphi_i u-\sin\varphi_i\omega_i}{(u^2+\omega_i^2+y^2)^{3/2}}du\\&=\cos\varphi_i\ln\frac{r_i(Y+R_{i+1})}{r_{i+1}(Y+R_{i+1})}-\sin\varphi_i\{arctg\frac{Yu_{i+1}}{\omega_i R_{i+1}}-arctg\frac{Yu_i}{\omega_i R_i}\}\end{aligned}\quad\text{（5-4-13）}$$

$$\begin{aligned}I_3(Y,i)&==\int_0^Y dy\int_{u_i}^{u_{i+1}}\frac{\sin\varphi_i u-\cos\varphi_i\omega_i}{(u^2+\omega_i^2+y^2)^{3/2}}du\\&=-\sin\varphi_i\ln\frac{r_i(Y+R_{i+1})}{r_{i+1}(Y+R_i)}+\cos\varphi_i\{arctg\frac{Yu_{i+1}}{\omega_i R_{i+1}}-arctg\frac{Yu_i}{\omega_i R_i}\}\end{aligned}\quad\text{（5-4-14）}$$

$$\begin{aligned}I_4(Y,i)&==\int_0^Y dy\cdot y\int_{u_i}^{u_{i+1}}\frac{1}{(u^2+\omega_i^2+y^2)^{3/2}}du\\&=\frac{1}{2}\ln\frac{(R_{i+1}-u_{i+1})(u_{i+1}+r_{i+1})}{(u_{i+1}+R_{i+1})(r_{i+1}-u_{i+1})}-\frac{1}{2}\ln\frac{(R_i-u_i)(r_i+u_i)}{(u_i+R_i)(r_i-u_i)}\end{aligned}\quad\text{（5-4-15）}$$

利用泊松公式，可得到磁异常的三分量为：

$$X_a(r_0)=-\frac{\mu_0}{4\pi}\sum_{i=1}^{N}\sin\varphi_i\ [M_xI_x(i)+M_yI_y(i)+M_zI_z(i)]$$

$$Y_a(r_0)=\frac{\mu_0}{4\pi}\{-\sum_{i=1}^{N}[M_x\sin\varphi_i-M_z\cos\varphi_i]I_y(i)+M_y\sum\sin\varphi_{i\,i}I_x(i)-\cos\varphi_iI_z(i)\}$$

$$Z_a(r_0)=\frac{\mu_0}{4\pi}\sum_{i=1}^{N}\{\cos\varphi_i[M_xI_x(i)+M_yI_y(i)+M_zI_z(i)\}$$

总场磁异常为

$$\Delta T(r_0)=X_a\cos I_0\cos D_0+Y_a\cos I_0\sin D_0+Z_a\sin I_0$$

式中：

$$I_x(i)=I_2(Y_2,i)-I_2(Y_1,i),I_z(i)=I_3(Y_2,i)-I_3(Y_1,i),I_y(i)=I_4(Y_2,i)-I_4(Y_1,i),$$

M 为物体的磁化强度，$M=\kappa T_0$；T_0 为地球磁场，I_0,D_0 分别为地磁倾角，测线方位与磁北的夹角；κ 为物体的磁化率；$x\cdot n_i=\sin\varphi_i,z\cdot n_i=-\cos\varphi_i$；$M_x=M\cos I\cos D$，$M_y=M\cos I\cos D$，$M_z=M\sin I$；$I,D$ 分别为磁化倾角和磁化方向在 xy 平面投影的方位角。

当场源物体是由几个多边形组合而成时，异常可迭加而得：

$$\Delta g(r_0)=\sum_{j=1}^{N}\Delta g_j(r_0)$$

$$\Delta T(r_0)=\sum_{j=1}^{N}\Delta T_j(r_0)\qquad\text{（5-4-16）}$$

$$\Delta Z_a(r_0)=\sum_{j=1}^{N}Z_{aj}(r_0)$$

其中，j 为多边形编号，N 为多边形总个数。

*第五节 直立长方体

以直立长方体中心在水平面上的投影为坐标原点，y 轴平行长方体走向，x 轴正向与 $\bar{M}_H$ 的夹角为 B。其余参量如图 5-5-1 所示。h 为顶面中心埋深，体积元的坐标为 ξ、η、ς。

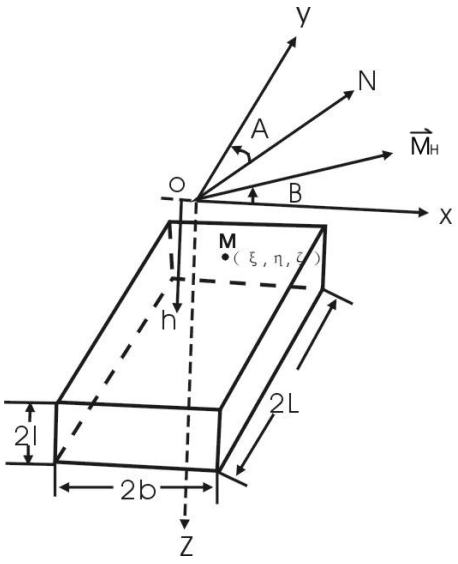


图 5-5-1 直立长方体模型

对上图所示的长方体，通过求得其引力位，再用泊松公式求出其磁场表达式。

$$U = -\frac{1}{4\pi G\sigma}\boldsymbol{M}\cdot\nabla_p V$$

上式即为磁位与引力位间的泊松公式。该式表明，同一个既均匀磁化又密度均匀物体的磁位，可由其引力位来计算。

若已知物体的引力位，利用泊松公式可求得计算磁场各分量的表达式，根据位场关系有

$$H_{ax} = -\mu_0\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\mu_0}{4\pi G\sigma}[M_x V_{xx} + M_y V_{yx} + M_z V_{zx}]$$

$$H_{ay} = -\mu_0\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\mu_0}{4\pi G\sigma}[M_x V_{xy} + M_y V_{yy} + M_z V_{zy}]$$

$$H_z = -\mu_0\frac{\partial U}{\partial z} = \frac{\mu_0}{4\pi G\sigma}[M_x V_{xz} + M_y V_{yz} + M_z V_{zz}]$$

取长方体内体积元 Q 的坐标为(ξ、η、ς)，其体积为 $d\xi d\eta d\zeta$，则该长方体在观测点的引力位及其二阶导数为：（为了方便下式，令 $G\sigma = 1$）。

$$V = \int_{-b}^{b}\int_{-L}^{L}\int_{h}^{h+2l}\frac{1}{[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+\zeta^2]^{1/2}}d\xi d\eta d\zeta$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \int_{-b}^{b}\int_{-L}^{L}\int_{h}^{h+2l}\frac{-(x-\xi)}{[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+\zeta^2]^{3/2}}d\xi d\eta d\zeta$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \int_{-b}^{b}\int_{-L}^{L}\int_{h}^{h+2l}\frac{-(y-\eta)}{[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+\zeta^2]^{3/2}}d\xi d\eta d\zeta$$

$$\frac{\partial V}{\partial z}=\int_{-b}^{b}\int_{-L}^{L}\int_{h}^{h+2l}\frac{\zeta}{[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+\zeta^2]^{3/2}}d\xi d\eta d\zeta$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}=-\int_{-b}^{b}\int_{-L}^{L}\int_{h}^{h+2l}\frac{(y-\eta)^2+\zeta^2-2(x-\xi)^2}{[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+\zeta^2]^{5/2}}d\xi d\eta d\zeta$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}=-\int_{-b}^{b}\int_{-L}^{L}\int_{h}^{h+2l}\frac{(x-\xi)^2+\zeta^2-2(y-\eta)^2}{[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+\zeta^2]^{5/2}}d\xi d\eta d\zeta$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=-\int_{-b}^{b}\int_{-L}^{L}\int_{h}^{h+2l}\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2-2\zeta^2}{[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+\zeta^2]^{5/2}}d\xi d\eta d\zeta$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x\partial y}=3\int_{-b}^{b}\int_{-L}^{L}\int_{h}^{h+2l}\frac{(x-\xi)(y-\eta)}{[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+\zeta^2]^{5/2}}d\xi d\eta d\zeta$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x\partial z}=3\int_{-b}^{b}\int_{-L}^{L}\int_{h}^{h+2l}\frac{-(x-\xi)\zeta}{[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+\zeta^2]^{5/2}}d\xi d\eta d\zeta$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y\partial z}=3\int_{-b}^{b}\int_{-L}^{L}\int_{h}^{h+2l}\frac{-(y-\eta)\zeta}{[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+\zeta^2]^{5/2}}d\xi d\eta d\zeta$$

考虑到关系式：$M_x=M\cdot\cos I\cdot\sin A$，$M_y=M\cdot\cos I\cdot\cos A$，$M_z=M\cdot\sin I$ 将上列各式代入上面的泊松公式，可得：

$$Z_a=3M\cdot\cos I\cdot\sin A\int_{-b}^{b}\int_{-L}^{L}\int_{h}^{h+2l}\frac{-(x-\xi)\zeta}{[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+\zeta^2]^{5/2}}d\xi d\eta d\zeta$$

$$+3M\cdot\cos I\cdot\cos A\int_{-b}^{b}\int_{-L}^{L}\int_{h}^{h+2l}\frac{-(y-\eta)\zeta}{[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+\zeta^2]^{5/2}}d\xi d\eta d\zeta$$

$$-M\cdot\sin I\cdot\int_{-b}^{b}\int_{-L}^{L}\int_{h}^{h+2l}\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2-2\zeta^2}{[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+\zeta^2]^{5/2}}d\xi d\eta d\zeta$$

对上式积分后得：

$$Z_a=-M\sin I\{ctgI\cos B\,|||\,Ln[\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+\zeta^2}-(\eta-y)]\Big|_{-b}^{b}\Big|_{-L}^{L}\Big|_{h}^{h+2l}+ctgI\sin B$$

$$\cdot|||\,Ln[\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+\varsigma^2}-(\xi-x)]\Big|_{-b}^{b}\Big|_{-L}^{L}\Big|_{h}^{h+2l}$$

$$+|||\,tg^{-1}\frac{(\eta-y)(\xi-x)}{\varsigma\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+\varsigma^2}}\Big|_{-b}^{b}\Big|_{-L}^{L}\Big|_{h}^{h+2l}\}\qquad(5\text{-}5\text{-}1)$$

上式中将上下限代入后，即可得测点$(x,y,0)$的Z_a表达式。

用同样的方法，可求出H_{ax}、H_{ay}的磁场表达式。

$$H_{ax}=-M\sin I\{ctgI\cos B\cdot|||tg^{-1}\frac{(\eta-y)\varsigma}{(\xi-x)\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+\varsigma^2}}|_{-b}^{b}|_{-L}^{L}|_{h}^{h+2l}$$
$$+ctgI\sin B|||Ln[\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+\varsigma^2}-\varsigma]|_{-b}^{b}|_{-L}^{L}|_{h}^{h+2l} \quad (5\text{-}5\text{-}2)$$
$$+|||Ln[\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+\varsigma^2}-(\eta-y)]|_{-b}^{b}|_{-L}^{L}|_{h}^{h+2l}\}$$

$$H_{ay}=-M\sin I\{ctgI\cos B\cdot|||Ln[\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+\varsigma^2}-\varsigma]|_{-b}^{b}|_{-L}^{L}|_{h}^{h+2l}$$
$$+ctgI\sin B\cdot|||tg^{-1}\frac{(\xi-x)\varsigma}{(\eta-y)\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+\varsigma^2}}|_{-b}^{b}|_{-L}^{L}|_{h}^{h+2l} \quad (5\text{-}5\text{-}3)$$
$$+|||Ln[\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+\zeta^2}-(\xi-x)]|_{-b}^{b}|_{-L}^{L}|_{h}^{h+2l}\}$$

将 Z_a、H_{ax}、H_{ay} 代入如下（5-5-4）ΔT 表达式，即可计算 ΔT 。

$$\Delta T=H_{ax}\cos I\ \cos A'+H_{ay}\cos I\sin A'+Za\sin I \quad (5\text{-}5\text{-}4)$$

式中 I 为地磁倾角， A' 为测线方向 x 轴与磁北的夹角。

实际计算时发现，在上半无源空间(即 $\zeta-z>0$)，当长方体顶面的四个角点在计算平面上的垂直投影点与网格点重合时(即 $x=\xi,y=\eta$)，在这些网格点(见图5-5-1中黑点) 上,表达式(5-5-2) ～ (5-5-4) 中均出现分母和分子同时为零情况，因而这些网格点场值成为正演表达式无法计算的解析“奇点”。 虽然上述公式中长方体的 Z_a 场表达式不存在“奇点”问题，但 H_{ax},H_{ay} 场表达式以及由此导出的 ΔT 场表达式均存在上述无法计算的解析“奇点”问题。因此这两步运算及导出的表达式在这四个特殊的网格点(即所谓的“奇点”) 上是无意义和不成立的。

为了解决长方体 ΔT 场正演计算原理论表达式的“奇点”问题,必须重新推导公式左端的积分,以得到详细的正确推导过程和无“奇点”的解析表达式。郭志宏，管志宁 2004 年给出了无“奇点”正演公式。另外一个比较简单的解决“奇点”问题的方法就是如果遇到观测点位于直立长方体边缘正上方情况时，可以将其 x 和 y 坐标值加上一个小小的增量，这样按照公式计算出的值作为解析“奇点”位置的正演值，才能正确反映地下磁异常。

如图 5-5-2 所示，长方体的参数为 I=45°，A=90°，M=10000×10^{-3}A/m,h=100m，2b=100m，2L=200m,2l=50m，虚线框是长方体在地表投影。

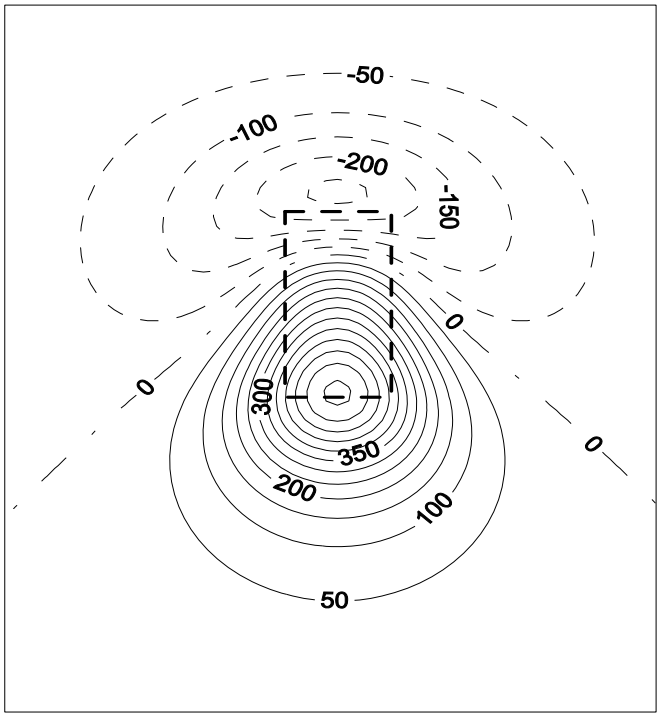


图 5-5-2　直立长方体 ΔT 磁异常（等值线单位 nT）

*第六节 磁异常正演的频谱表示

利用连续傅立叶变换方法可以把规则几何形体磁异常正演的空间域表达式用频谱（波谱）表示，其频谱的正演表达式比空间域表达式简单。对于实测的磁异常采用离散傅立叶变换计算速度快。

一、规则几何形体磁异常频谱

（一）无限延深、顺轴磁化棒状体（点极）

由磁库仑定律，位于 (ξ,η,ς) 处，磁量为 $m'=M_n ds$ 的点极磁位：

$$U=\frac{1}{4\pi}\frac{m'}{\{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\varsigma)^2\}^{1/2}} \qquad (5\text{-}6\text{-}1)$$

由积分变换表（Erdelyi,1954）给出：

$$\frac{1}{\{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\varsigma)^2\}^{1/2}}\rightarrow\frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}}e^{2\pi(z-\zeta)\sqrt{u^2+v^2}}$$

以及傅里叶变换的位移定理，$U(x,y,z)$ 的频谱 $U(u,v,z)$ 为

$$U(u,v,z)=\frac{m'}{4\pi}\frac{e^{2\pi(z-\varsigma)\sqrt{u^2+v^2}}}{\sqrt{u^2+v^2}}e^{-i2\pi(u\xi+v\eta)} \qquad (5\text{-}6\text{-}2)$$

把上式乘以 μ_0 和磁场导数因子 q_t，得

$$\Delta T(u,v,z)=\frac{\mu_0 m'}{4\pi}q_t\frac{e^{2\pi(z-\varsigma)\sqrt{u^2+v^2}}}{\sqrt{u^2+v^2}}e^{-i2\pi(u\xi+v\eta)} \qquad (5\text{-}6\text{-}3)$$

其中磁场导数因子 $q_t=2\pi\{i(Lu+Mv)+N\sqrt{u^2+v^2}\}$，*L,M,N* 是地磁场 $\mathbf{T_0}$ 单位矢量 $\boldsymbol{t}_0$ 的方向余弦：

$$L=\cos(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}_0)=\cos I\cos A',M=\cos(\boldsymbol{y},\boldsymbol{t}_0)=\cos I\sin A',N=\cos(\boldsymbol{z},\boldsymbol{t}_0)=\sin I$$

当对 x 求导数时，令 L=1,M=N=0, 当对 y 求导数时，令,M =1, L =N=0, 当对 z 求导数时，令 N =1,M= L =0。.

（二）球体

磁矩为 $m=\frac{4}{3}\pi R^3 M$ 的球体磁场相当磁偶极子磁场。球中心位于 (ξ,η,ς) 处时，磁场 ΔT 为

$$\Delta T=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\cdot\frac{\partial}{\partial l}\frac{m}{\{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\varsigma)^2\}^{1/2}} \qquad (5\text{-}6\text{-}5)$$

相当以 m 代 m' 求点极位的磁化方向与磁场方向二阶偏导数再乘以 μ_0，故有

$$\begin{aligned}\Delta T(u,v,z)&=\frac{\mu_0 m}{4\pi}q_t q_l\frac{e^{2\pi(z-\varsigma)\sqrt{u^2+v^2}}}{\sqrt{u^2+v^2}}e^{-i2\pi(u\xi+v\eta)}\\ q_l&=2\pi[i(\alpha u+\beta v)+\gamma(u^2+v^2)^{1/2}]\\ q_t&=2\pi[i(Lu+Mv)+N(u^2+v^2)^{1/2}]\end{aligned} \qquad (5\text{-}6\text{-}6)$$

L,M,N 是地磁场方向余弦，α,β,γ 是磁化强度方向的方向余弦。当不考虑剩磁时，α,β,γ 与 *L,M,N* 相同。

（三）无限长水平圆柱体

已知走向无限长的水平圆柱体的重力异常为：$\Delta g(x)=\frac{2\pi G\sigma r^2\cdot R}{(x^2+R^2)}$。式中，$G$ 为引力常量；σ 为密度；r 为圆柱体截面半径；R 为圆柱体中心埋深。通过傅氏变换求得重力异常频谱

$$\Delta g(u)=\int_{-\infty}^{\infty}g(x)e^{-i2\pi ux}dx=2\pi^2 G\sigma r^2 e^{-2\pi uR} \qquad (5\text{-}6\text{-}7)$$

由频率域泊松公式可得磁异常的垂直分量的频谱为

$$Za(u)=\mu_0\pi\cdot m_s u e^{-2\pi uR}e^{i(\frac{\pi}{2}-i_s)} \qquad (5\text{-}6\text{-}10)$$

式中：i_s 为有效磁化倾角；$m_s=\pi r^2 M_s$（M_s 为有效磁化强度）为圆柱体单位长度的磁矩。

（四）无限长、无限延深薄板

由积分公式

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{h}{h^2+x^2}e^{-i2\pi ux}dx=\pi e^{-2\pi uh}\ ,\ \int_{-\infty}^{\infty}\frac{x}{h^2+x^2}e^{-i2\pi ux}dx=-i\pi e^{-2\pi uh}$$

可得：

$$Za(u)=\mu_0 bM_s\sin\beta e^{-2\pi uh}(\cos\gamma+i\sin\gamma)=\mu_0 bM_s\sin\beta e^{-2\pi uh}e^{i\gamma} \qquad (5\text{-}6\text{-}11)$$

式中：γ 为有效磁化强度 M_s 方向与薄板倾斜面之间夹角，即 $\gamma=\beta-i_s$，β 为板倾角。

（五）无限长、有限延深薄板

有限延深薄板可以看作两个不同埋深、同倾角、无限延深薄板相减得到。设坐标原点在顶部中心的投影点上，上顶坐标为 $(0,h_1)$，下底坐标为 (x_2,h_2)，$\beta,2b$ 分别为板的倾角和水平宽度，$2l$ 为延深长度。利用（5-6-11）式与傅里叶变换位移定理，分别对上顶、下底列出频谱公式而后相减即得：

$$\begin{aligned}Za(u)&=\mu_0 bM_s\sin\beta(e^{-2\pi\mu h_1}-e^{-2\pi\mu h_2}e^{-2\pi\mu x_2})e^{i\gamma}\\&=\mu_0 bM_s\sin\beta e^{-2\pi\mu h_1}(1-e^{-2\pi u2l\sin\beta}\cdot e^{-i2\pi u2l\cos\beta})e^{i\gamma}\end{aligned} \qquad (5\text{-}6\text{-}12)$$

（六）无限长倾斜厚板

设坐标原点位于厚板顶部中心正上方，此时厚板的磁异常可视为宽 $d\xi$ 的倾斜有限延深薄板磁异常沿 ξ 方向的积分。令厚板水平宽度为 $2b$，则由下式求出厚板的频谱：

$$Za(u)=\int_{-b}^{b}Za_{薄}(u)e^{-i2\pi u\xi}d\xi \qquad (5\text{-}6\text{-}13)$$

式中：Za(u)、$Za_{薄}(u)$ 分别为厚板和薄板的频谱。令薄板宽度 $2b=d\xi$，对上式运算，得

$$\begin{aligned}Za(u)&=Za_{薄}(u)\int_{-b}^{b}e^{-i2\pi u\xi}d\xi=\frac{Za_{薄}(u)}{\pi u}\sin(2\pi ub)\\&=\frac{\mu_0 M_s\sin\beta}{2\pi u}\sin(2\pi ub)(e^{-2\pi uh_1}-e^{-2\pi uh_2}e^{-i2\pi u(h_2-h_1)\cos\beta})e^{i\gamma}\end{aligned} \qquad (5\text{-}6\text{-}14)$$

当 $\beta=\frac{\pi}{2}$ 时，则得有限延深直立厚板频谱：

$$Za(u)==\frac{\mu_0 M_s\sin\beta}{2\pi u}\sin(2\pi ub)(e^{-2\pi uh_1}-e^{-i2\pi uh_2})e^{i(\frac{\pi}{2}-i_s)} \qquad (5\text{-}6\text{-}15)$$

当 $h_2\to\infty$，则得无限延深倾斜厚板的异常频谱：

$$Za(u)==\frac{\mu_0 M_s \sin\beta}{2\pi u}\sin(2\pi ub)e^{-2\pi uh_1}e^{i\gamma} \qquad (5\text{-}6\text{-}16)$$

（七）直立长方体

设直立长方体顶面中心位于$(0,0,h)$，宽$2b$、长$2L$、厚$2L$。其磁场ΔT为偶极子场积分，偶极子磁矩$dm=Mdv$

$$\Delta T=\frac{\mu_0}{4\pi}M\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial l}\int_{-b}^{b}\int_{-L}^{L}\int_{h}^{h+2l}\frac{d\xi d\eta d\varsigma}{[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\varsigma)^2]^{1/2}}$$

其频谱$\Delta T(u,v,z)$为

$$\Delta T(u,v,z)=\frac{\mu_0}{4\pi}Mq_tq_l\frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}}\int_{-b}^{b}\int_{-L}^{L}\int_{h}^{h+2l}e^{2\pi(z-\varsigma)\sqrt{u^2+v^2}}e^{-i2\pi(u\xi+v\varsigma)}d\xi d\eta d\varsigma$$

$$=\frac{\mu_0}{4\pi}M\frac{q_tq_l}{2\pi(u^2+v^2)}\cdot 2b\cdot 2L\cdot\frac{\sin(2\pi ub)}{2\pi ub}\cdot\frac{\sin(2\pi vL)}{2\pi vL}\{e^{2\pi(z-h)\sqrt{u^2+v^2}}-e^{2\pi[z-(h+2l)]\sqrt{u^2+v^2}}\}$$

（5-6-17）

二、磁异常频谱特征分析

磁异常频谱是复数，即$\Delta T(u,v)=\mathrm{Re}\,\Delta T+i\,\mathrm{Im}\,\Delta T=A(u,v)e^{i\phi(u,v)}$。其中：$\mathrm{Re}\,\Delta T$、$\mathrm{Im}\,\Delta T$分别为频谱的实部和虚部；而$A(u,v)=[(\mathrm{Re}\,\Delta T)^2+(\mathrm{Im}\,\Delta T)^2]^{1/2}$，$\phi(u,v)=\arctan(\frac{\mathrm{Im}\,\Delta T}{\mathrm{Re}\,\Delta T})$分别为磁异常频谱的模及幅角，也称为振幅谱及相位谱。

（一）三度体磁异常的振幅谱

直立长方体振幅谱平面等值线图如图5-5-1所示。由于水平因子存在，直立长方体沿u,v二轴均呈现周期脉动形态。谱的零等值线与v轴或u的交点称为结点，$u=\frac{n\pi}{b},v=\frac{n\pi}{L}$。由于其它因子（特别是深度因子）的影响，脉动峰值随频率增加而衰减。

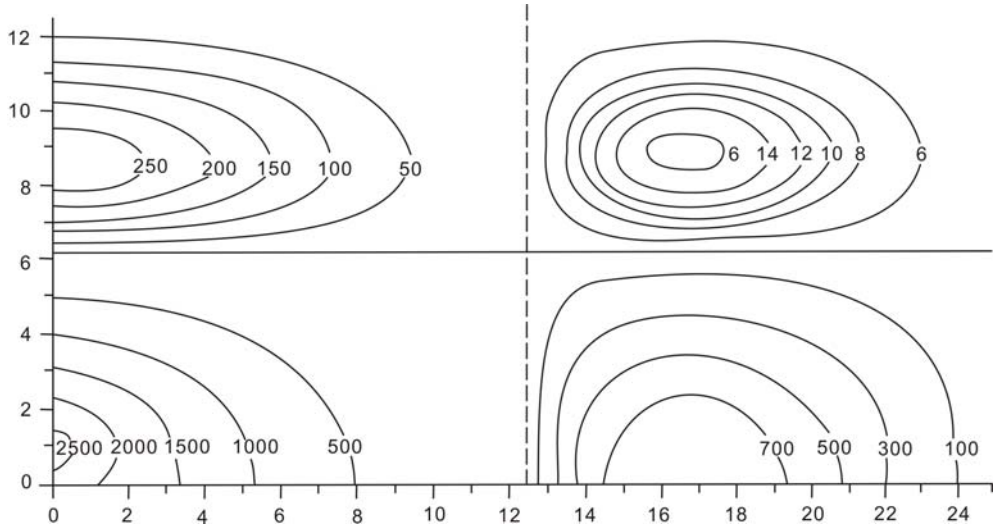


图 5-6-1 直立长方体振幅谱等值线图

（二）二度体磁异常的振幅谱与相位谱

1.振幅谱

二度体磁异常振幅谱图形可分为三种类型：连续型、周期脉动型和过渡型。在直角坐标系中，振幅谱曲线为 $A(u)-u$，以实线表示；在半对数坐标系中，振幅谱曲线为 $\ln A(u)-u$，称为对数振幅谱，以虚线表示（图 5-6-2）。

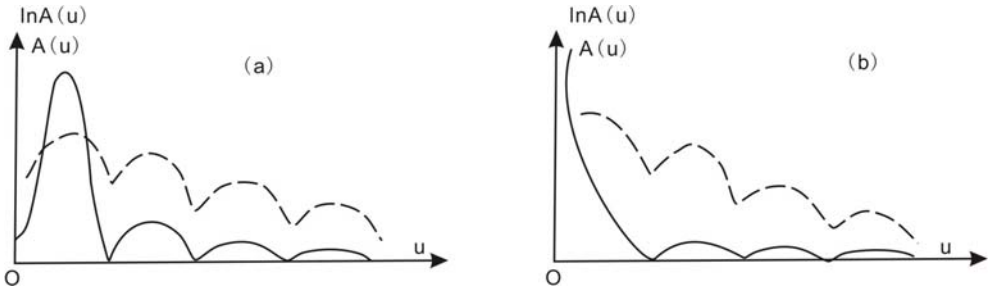


图 5-6-2 周期脉动型谱曲线

(a) 水平薄板； (b)无限延深厚板；虚线为 $A(u)$，实线为 $\ln A(u)$

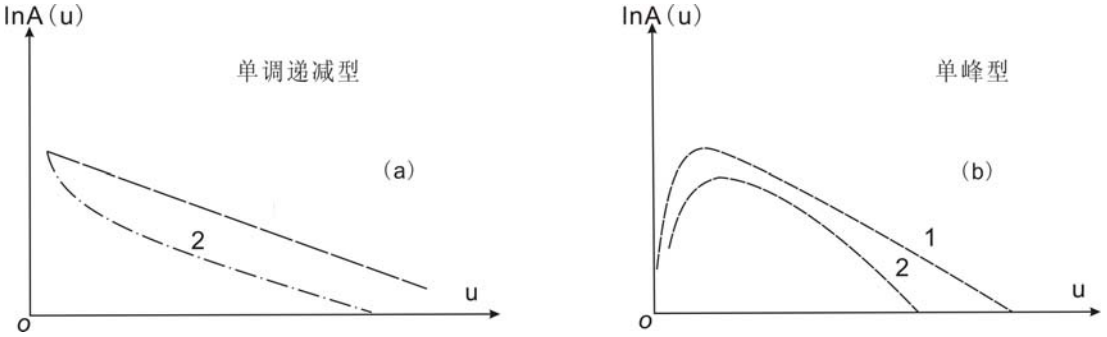


图 5-6-3 连续型的谱曲线

(a) 1-无限延深薄板的对数振幅谱曲线；2-直立台阶的对数振幅谱曲线。

(b) 1-有限延深直立薄板的对数振幅谱曲线；2-水平圆柱体的对数谱振幅曲线

连续型 在谱表达式中，水平因子等于 1，深度因子 $H=e^{-2\pi uh}$ 或 $H=e^{-2\pi uh_1}-e^{-2\pi uh_2}$。这类振幅谱不出现周期性脉动或波动。属于此类型的除了直立台阶外都是横向水平尺寸不大的物体，如水平圆柱体，直立的或无限延深的薄板状体，如图 5-6-3 所示。

连续型中又可细分为两类。一是单峰型曲线，在 u 趋于零波数时 $\ln A(u)\to 0$，有一个明显的波峰；如有限延深直立薄板和水平圆柱体，如图 5-6-3（b）所示。另一类是单调递减型，随 u 增大 $\ln A(u)$ 单调减小的曲线。如无限延深薄板及半无限的水平台阶，见图 5-6-3（a）。

周期脉动型 在谱表达式中，水平因子 $B(u)=\sin(2\pi bu)/(2\pi bu)$。由于 B 为周期函数，当 $u=\dfrac{n\pi}{b}$ 时， $B(u)=0$，因此振幅谱是以 $\dfrac{\pi}{b}$ 为周期的脉动曲线。水平薄板、厚板及棱柱体等水平尺寸较大的物体，其振幅谱曲线均属此类，如图 5-6-2 所示。这类振幅谱曲线中，当 $u\to 0$，若 $A(u)\to 0$ 为有限延深磁性体，若 $A(u)\to c$，则为无限延深物体。

过渡型 在这类型中，有限延深倾斜薄板为典型形体，其水平因子等于 1，$H(u)=e^{-2\pi uh_1}[1-e^{-2\pi u2L\sin\beta}e^{-i2\pi u2L\cos\beta}]$。当$\beta=\frac{\pi}{2}$时，为直立薄板，$A(u)$为连续型；当$\beta\to 0$时，$H(u)$中出现了周期函数$\sin(2\pi Lu)$，这使$A(u)$呈现周期脉动现象。因此，有限延深倾斜薄板振幅谱介于连续型和周期脉动型之间，故为过渡型。曲线产生周期性扭动，但扭动的幅度不是很大；对下延深度较大的物体，当$30°<\beta<150°$时，这种扭动表现的很不明显。

2.相位谱

规则几何形状二度体的相位谱分为直线型与收敛型两大类。

直线类 水平圆柱体，无限延深倾斜薄板与厚板，水平薄板，有限延深直立薄板与厚板。

水平圆柱体、水平薄板、有限直立薄板、厚板等相位谱，考虑位移因子后，有

$$\phi(u)=(\frac{\pi}{2}-i_s)+(\frac{\pi}{2}-\varphi_t)-2\pi ux_0 \qquad (5\text{-}6\text{-}18)$$

其中，φ_t为场矢量t倾角，x_0为中心点横坐标。无限倾斜薄板、厚板相位谱，有

$$\phi(u)=(\beta-i_s)+(\frac{\pi}{2}-\varphi_t)-2\pi ux_0 \qquad (5\text{-}6\text{-}19)$$

其中，x_0为顶面中心横坐标，φ_t同上。

可见，当坐标原点选在剖面左端时，x_0为正值，$\varphi(u)$直线有负斜率$(-2\pi x_0)$。

因子$1-e^{-2\pi u2l\sin\beta}\cdot e^{-i2\pi u2l\cos\beta}$是它们谱公式中共有的，也是比直线型相位谱多的一项。

令$d=2L\cos\beta$，则其幅角$\tilde{\varphi}(u)=\arctan\{\frac{e^{-2\pi 2L\sin\beta\cdot u}\sin(2\pi ud)}{1-e^{-2\pi 2L\sin\beta\cdot u}\cos(2\pi ud)}\}$

故有限延深倾斜薄板与厚板相位谱为

$$\phi(u)=(\beta-i_s)+(\frac{\pi}{2}-\varphi_t)+\tilde{\varphi}(u)-2\pi ux_0 \qquad (5\text{-}6\text{-}20)$$

当$u\to 0$时，$e^{-2\pi u2l\sin\beta}\to 0,\tilde{\varphi}\to 0$；而当$u$由 0 增加时，$\tilde{\varphi}(u)=\frac{\pi}{2}$，$\tilde{\varphi}(\frac{k\pi}{2\pi d})=0,k$为整数。故$\tilde{\varphi}(u)$是以 0° 为渐近线的指数衰减振荡曲线，如图 5-6-4 所示。整个相位谱则以斜率$(-2\pi x_0)$的直线为渐近线。

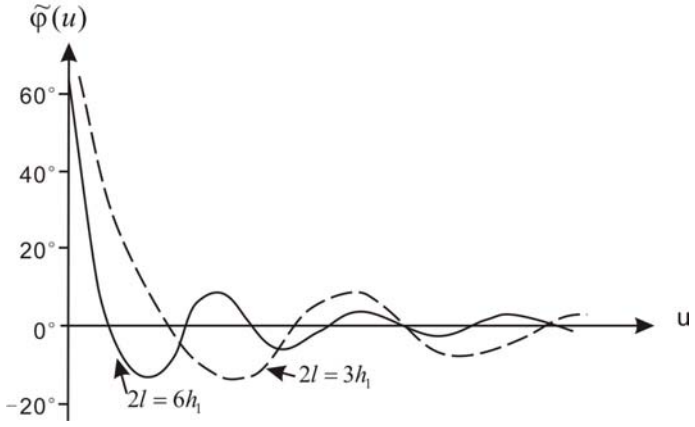


图 5-6-4 不同延深倾斜薄板的曲线 $\tilde{\varphi}$

第七节　规则磁性体与磁异常关系

由上述的磁异常正演的公式与曲线特征可以得出，任意磁化方向的磁性体磁场表达式及其曲线特征与垂直磁化和顺层磁化有内在的联系，只要掌握了沿特定方向磁化（如垂直磁化和顺层磁化）磁性体的简单基本函数形式及其曲线特征，就可以根据任意磁化与特定方向磁化间的关系式，分析任意磁化方向下的磁化体磁场表达式及其曲线特征。

我们可以通过磁性体的磁场平面特征、剖面特征和空间特征来展示磁性体与磁场的对应关系，分辨一种形体与另一种形体磁场特征的差别。因此，对不同形体与其磁场特征的对应关系进行总结分析，对实际磁异常的解释和系统掌握磁性体磁场特征是必要的。

一、磁性体与其磁场平面分布的对应关系

单个磁性体 ΔT 磁异常的平面等值线形状大体可分为三种，即长带状、等轴状和椭圆状。如球体的 ΔT 等值线为等轴状，二度板状体和水平圆柱体等的 ΔT 等值线为长带状，有限长水平圆柱体和板状体的异常为长椭圆状。可见平面等值线的形态往往是磁性体水平展布情况的反映，磁异常轴的方向一般反映地质体的走向。

我们可以根据 ΔT 等值线的形状，把磁性体区分为二度异常和三度异常。即取 1/2 极大值等值线，若长轴为短轴长度的三倍以上，则视为二度体异常；否则为三度体异常。三度异常又可分为长、短轴近于相等的等轴状异常和长轴之比大于 1 而小于 3 的似二度异常。

二、磁性体与其磁场的剖面对应关系

由以前的讨论可知，磁性体的 ΔT 剖面曲线有三种基本形态：两侧无负异常的 ΔT 曲线、一侧有负异常的 ΔT 曲线和两侧有负异常的 ΔT 曲线。

（一）两侧无负异常的 ΔT 曲线

顺层（或顺轴）磁化无限延深板状体（或柱状体）的 ΔT 异常为两侧无负值的曲线。其极大值对应原点。这种剖面异常特征可作为判定磁性体顺层（或顺轴）磁化且向下无限延深的标志。

（二）一侧有负异常的 ΔT 曲线

斜磁化无限延深板状体的 ΔT 剖面曲线为一侧有负值的曲线。ΔT 曲线不对称，原点位

于ΔT_{max}和ΔT_{min}之间；负值位于$\boldsymbol{M}_s$指向的一侧。曲线的不对称性决定于γ（$=\alpha-i_s$）角的大小；γ角愈大，曲线愈不对称。当磁性体呈南北走向时，$\boldsymbol{M}_s$垂直向下。可根据ΔT曲线的陡缓判断板状体的倾向。

（三）两侧有负值的ΔT曲线

ΔT剖面曲线两侧出现负值，是磁性体下延深度不大的表现。如球体、有限延深的柱体和板状体、水平圆柱体等，其ΔT剖面曲线一般都是两侧出现负值。

有限延深磁性体的截面为轴对称形的，如球体、水平圆柱体和直立板状体等，在垂直磁化情况下，其ΔT曲线为两侧有负值的对称曲线；并且其极值对应原点。若为斜磁化，ΔT为非对称曲线，原点位于两极值点坐标之间。顺层磁化有限延深板状体，在板体倾向一侧负值较强；对有限延深、倾斜且斜磁化的板状体，其曲线的非对称性不仅与γ角有关，还与磁性体下端的位置有关。

三、ΔT受斜磁化影响比Z_a大、二度体T_a异常不受斜磁化影响

由本章第八节二度垂直磁化磁异常规格化公式可知，若为 Za 时，$K=1,\theta=i_s$；若为 Ha 时，$K=1,\theta=i_s-90$;若为ΔT时，$K=\sin I/\sin i_s,\theta=2i_s-90$。有效磁化倾角为$i_s$的一个二度体$\Delta T$曲线相当于有效磁化倾角为$2i_s-90^0$的同一个二度体的 Za 曲线。若 Za 曲线$i_s$从$90^0\sim0^0$变化，则$\Delta T$曲线变化更快，相当于 Za 曲线$i_s$从$90^0\sim-90^0$变化。如$i_s=45^\circ$的$\Delta T$曲线，相当于$i_s=0^\circ$时的$Z_a$曲线，这表明$\Delta T$受斜磁化影响比$Z_a$大。根据上述关系，可以用有效磁化倾角$i_s^{'}$的$Z_a$曲线代替有效磁化倾角为$i_s$的曲线。三度体情况不存在此种简单关系。图 5-6-1 是不同有效磁化倾角i_s水平圆柱体的 Za ΔT曲线。

还可以直接得出结论：二度体的总磁场$T_a=\sqrt{H_a^2+Z_a^2}$不受斜磁化影响。

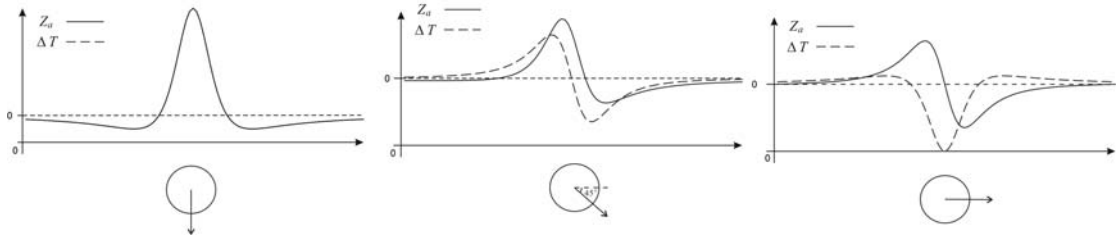


图 5-7-1 不同有效磁化倾角i_s水平圆柱体的Z_a、ΔT曲线

第八节 磁场正演的几个问题

一、南半球的磁场特征

在南半球，地磁倾角向上与北半球相反，其磁场特征与磁化方向关系怎样？下面我们以二度下延无限直立薄板为例讨论。由本章第三节我们知薄板状体磁场的表达式：

$$\left.\begin{aligned} Z_a &= \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{2bM_S\sin\alpha}{x^2+h^2}\left(h\cos\gamma - x\sin\gamma\right) \\ H_{aX} &= \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{-2bM_S\sin\alpha}{x^2+h^2}\left(h\sin\gamma + x\cos\gamma\right) \\ \Delta T &= -\frac{\mu_0 2bM_S\sin\alpha}{2\pi\left(x^2+h^2\right)}\frac{\sin I}{\sin i_s}\left[h\sin\left(\alpha-2i_s\right)+x\cos\left(\alpha-2i_s\right)\right] \end{aligned}\right\} \quad (5\text{-}8\text{-}1)$$

当薄板状体产状直立时，α=90^0，式（5-8-1）可改为：

$$\left.\begin{aligned} Z_a &= \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{2bM_S}{x^2+h^2}\left(h\cos i_s - x\sin i_s\right) \\ H_a &= \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{-2bM_S\sin\alpha}{x^2+h^2}\left(h\sin i_s + x\cos i_s\right) \\ \Delta T &= H_a\cos I\cos A' + Z_a\sin I \end{aligned}\right\} \quad (5\text{-}8\text{-}2)$$

当测线南北时，A’=0^0

$$\Delta T = H_a\cos I + Z_a\sin I$$

在北半球，$I>0$,cosI 与 sinI 为正，Ha 与 Za 合成的ΔT 曲线如图 5-8-1 所示（I=60^0）。而在南半球，$I<0$,cos 为偶函数，cosI 取正值， sin 为奇函数，sinI 取负值，相当于$Z_a\sin I$ 反了一个符号，Ha 与 Za 合成的ΔT 曲线如图 5-8-2 所示（I= -60^0）。因此，南半球ΔT 曲线正负值比例与磁化倾角的关系与北半球一样，差别仅在于：在北半球，正异常在南负异常在北，在南半球，则正异常在北负异常在南。

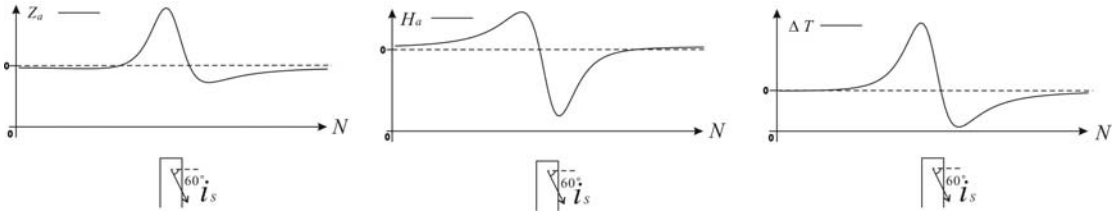


图 5-8-1　北半球二度下延无限直立薄板 I=60^0 的 Ha、Za 与ΔT 曲线

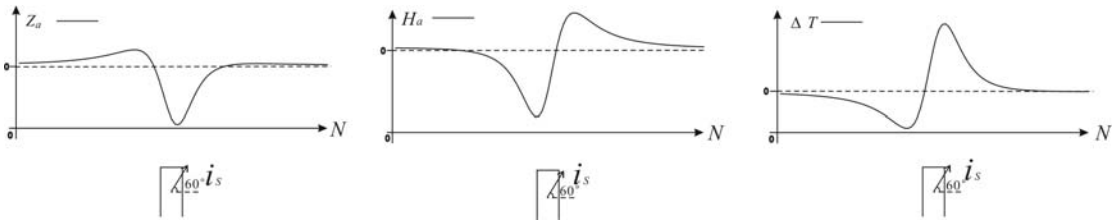


图 5-8-2　南半球二度下延无限直立薄板 I=60^0 的 Ha、Za 与ΔT 曲线

二、磁场正演计算的单位问题

在国际单位制 SI 中，我们以二度下延无限直立薄板为例：

$$\Delta T=-\frac{\mu_0 2bM_S\sin\alpha}{2\pi\left(x^2+h^2\right)}\frac{\sin I}{\sin i_s}\left[h\sin\left(\alpha-2i_s\right)+x\cos\left(\alpha-2i_s\right)\right] \qquad (5\text{-}8\text{-}3)$$

式中长度参数 x、2b、h 的量纲互相抵消了，不必考虑它们单位取 cm，m，km,只要相同量纲就可以。正余弦无量纲，因此ΔT的量纲取决于 $\frac{\mu_0 M_S}{4\pi}$或$\left(\frac{\mu_0 M}{4\pi}\right)$，$\mu_0$单位为 H/m，M 单位为 A/m，则正演计算所得磁场为韦伯/米 ^{2}， 即特斯拉（T）。再把特斯拉（T）化为磁法勘探实用单位纳特（nT），1nT=10^{-9}T。

我们进一步分析如下：

（一）在国际单位制（SI）

$M=\frac{\kappa T_0}{\mu_0}$， κ的常用单位$4\pi\times10^{-6}SI$,T_0常用单位 10^{-4}T,因此有

$$\frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{4\pi.10^{-6}}{\mu_0}\cdot10^{-4}T=10^{-10}T=10^{-1}nT$$

也就是说，在计算中我们κ以$4\pi\times10^{-6}SI$为单位,T_0以 10^{-4}T 为单位，将计算结果除以 10，得到ΔT的单位为纳特（nT）。

（二）在高斯制（CGSM）

二度下延无限直立薄板公式中要去掉$\frac{\mu_0}{4\pi}$：

$$\Delta T=-\frac{2b2J_S\sin\alpha}{\left(x^2+h^2\right)}\frac{\sin I}{\sin i_s}\left[h\sin\left(\alpha-2i_s\right)+x\cos\left(\alpha-2i_s\right)\right] \qquad (5\text{-}8\text{-}4)$$

$J=\kappa T_0$， κ的常用单位$10^{-6}CGSM$,T_0常用单位奥斯特(Oe)因此有

$$10^{-6}Oe=10^{-6}\times10^{5}\gamma=10^{-1}\gamma(nT)$$

也就是说，在计算中我们κ以$10^{-6}CGSM$为单位,T_0以 Oe 为单位，将计算结果除以 10，得到ΔT的单位为伽玛(γ)或纳特（nT）。

三、二度磁异常的规格化公式

将斜磁化时的磁异常Z_a、H_a、ΔT，用垂直磁化时的磁异常$Z_{a\perp}$、$H_{a\perp}$或顺层磁化时的磁异常$Z_{a//}$、$H_{a//}$表达出来，并给出它们之间的一般关系式（或规格化公式），不仅对理解磁场正演公式有帮助，而且还可以利用规格化公式分析Z_a、H_a、ΔT曲线。

若令$\mu_0/4\pi G\sigma=1$，当为垂直磁化时，$M_x=M_y=0,M_z=M$，则有：

$$H_{a\perp} = MV_{zx}$$
$$Z_{a\perp} = MV_{zz} \qquad (5\text{-}8\text{-}5)$$

考虑$V_{xx} = -V_{zz}$，$\tan i_s = \tan I \sec A'$，可得

$$H_a = -Z_{a\perp}\cos i_s + H_{a\perp}\sin i_s$$
$$Z_a = Z_{a\perp}\sin i_s + H_{a\perp}\cos i_s \qquad (5\text{-}8\text{-}6)$$
$$\Delta T = \frac{\sin I}{\sin i_s}[\sin(2i_s - 90°)\cdot Z_{a\perp} + \cos(2i - 90°)H_{a\perp}]$$

引入系数K和特征角θ，上式可表示为统一规格化公式：

$$\Delta F = K(Z_{a\perp}\sin\theta + H_{a\perp}\cos\theta) \qquad (5\text{-}8\text{-}7)$$

式中ΔF可分别代表Z_a、H_a、ΔT，磁异常分量不同，系数K、θ不同。若为Z_a时，$K = 1, \theta = i_s$；若为H_a，$K = 1, \theta = i_s - 90°$；若为$\Delta T$，$K = \sin I / \sin i_s, \theta = 2i_s - 90°$。

上式对二度体截面为轴对称形是方便的，若为有一定倾向的非轴对称形二度体，用以下规格化公式较方便：

$$\Delta F = K(Z_{a//}\cos\theta + H_{a//}\sin\theta) \qquad (5\text{-}8\text{-}8)$$

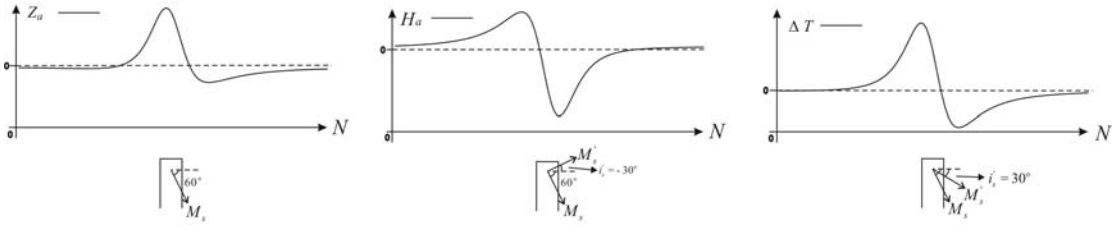
（5-8-8）式中K与（5-8-7）式取值相同。对θ角，若为Z_a时，$\theta = \alpha - i_s = \gamma$；若为$H_a$，$\theta = 90° + \gamma$；若为$\Delta T$，$\theta = 90° + \gamma - i_s$。

规格化公式表明，如我们掌握了某种形体的$Z_{a\perp}$、$H_{a\perp}$或$Z_{a//}$、$H_{a//}$的表达式及其曲线形态，就可利用规格化公式导出该形体斜磁化时的磁异常表达式，分析其剖面异常特征。

利用规格化公式，我们可以方便地分析和画出不同磁化方向的H_a、ΔT曲线。通常我们熟悉不同磁化方向的Z_a曲线，利用Z_a曲线我们可以画出H_a、ΔT曲线。如直立下延无限延深薄板状体，$\alpha = 90^0, is = 60^0$,则$\gamma = \alpha - i_s = 30^0, Za$曲线如图 5-8-3（a）。

对于H_a曲线，$\theta = 90^0 + \gamma = 120^0$，我们画$\theta = 120^0$，即$is' = -30^0$的$Za'$曲线即为$i_s = 60^0$的$H_a$曲线(见图 5-8-3（b）)。

对于ΔT曲线，$\theta = 90^0 + \gamma - i_s = 60^0$，我们画$\theta = 60^0$，即$i_s' = 30^0$的$Za'$曲线即为$i_s = 60^0$的$\Delta T$曲线(见图 5-8-3（c）)。



（a）　　（b）　　（c）

图 5-8-3　利用规格化公式画 H_a、ΔT 曲线

习　题

1、研究和计算磁性体磁场有何实际意义？

2、导出重磁位场泊松公式的条件及公式的用途？

3、决定剖面磁异常特征的因素有哪些？各起什么作用？

4、分析说明 H_{ax}、H_{ay}、Z_a、ΔT 的异同点。

5、一个走向无限、向下延深无限的直立厚板状体，其位于 $I = 0°$ 的磁赤道区，画图分析说明其被地磁场磁化的特征及不同走向时 Z_a、H_{ax}、ΔT 剖面曲线特征：(1)东西走向；(2)北东走向；(3)南北走向。

6、什么是二度磁异常的规格化公式？并说明其用途？

7、为什么 ΔT 受斜磁化的影响比 Za 大？请举例说明。

发展趋势与本章参考文献

任意形态三度体磁场的正演计算通常采用近似计算的数值积分法，如何提高计算的效率与精度是该方法研究的方向；强磁性地质体磁场的正演方计算是研究的热点，考虑磁性体自身消磁的磁场正演方法，即剩磁均匀、磁化率为常量的任意形态磁性体磁场的正演方法。在该研究中，磁化外场 H_0、剩磁和磁化率 κ 为已知，但因消磁影响，感应磁化强度 M_i 未知。为了解正问题，需利用边界条件并解积分方程求出表面磁荷密度进而求得磁场。其次是磁化率和剩磁各向异性、形态任意的磁性体磁场的正演方法，此时磁性体的参数 κ 和 $\overline{M_r}$ 需用张量来描述，其正演问题是磁法中最复杂的一种。从 20 世纪 70 年代后期，国内外学者相继研究出一些数值正演方法，如利用有限元和边界元等数值计算方法等。

参考文献

1、谭承泽，郭绍雍　磁法勘探教程，地质出版社，1984

2、管志宁　地磁学与磁力勘探，地质出版社，2005

3、罗孝宽，郭绍雍　应用地球物理教程-重力磁法，地质出版社，1991

4、张胜业，潘玉玲　应用地球物理原理，中国地质大学出版社，2004

5、申宁华、管志宁，磁法勘探问题，北京：地质出版社，1985，152～174

6、王书惠，关于用有限元法作磁法勘探正演计算的理论问题,地球物理学报,1981，24(1),207～217

7、徐宝慈，均质非二次曲面磁体的不均匀磁化问题，长春地质学院学报，1982，103～114

8、王书惠，磁各向异性条件下的磁法勘探正问题及其解法,地球物理学报,1983，26(1),58～69

9、R.Rasmussen, Pedersen L. B. End corrections in potential field modeling. Geophysical Prospecting, 1979, 27 (4): 749-760

10、黎益仕，姚长利，管志宁 重磁资料的实时正演拟合，物化探计算计算，Vol.16,No.3,1994,192~196
11、Wanwu Guo,Michael C.Dentith, Zhengxiang Li,and Christopher McA. Powell,Self demagnetisation corrections in magnetic modelling:some examples,Exploration Geophysics,1998(29):396-401
12、Wanwu Guo,Michael C.Dentithz,Robert T.Bird,and David A.Clark,Systematic error analysis of demagnetization and implications for magnetic interpretation,Geophysics, 2001:66(2),562–570
13、Dannemiller, N., and Y. Li, 2004, A new method for determination of magnetization direction: 74th Annual International Meeting, SEG, Expanded Abstracts, 758–761.
14、Shearer, S., and Y. Li, 2004, 3D inversion of magnetic total gradient data in the presence of remanent magnetization: 74th Annual International Meeting, SEG, Expanded Abstracts, 774–777.
15、李媛媛，杨宇山，刘天佑．考虑自退磁影响的三维复杂形体磁场正反演研究进展与展望．地球物理学进展，2010,25(2)：627～634
16、《地面磁测资料解释推断手册》编写组，地面磁测资料解释推断手册，北京，地质出版社，1979
17、王家林、王一新、王明浩，石油重磁解释，石油工业出版社，1991